8　積分順序の交換

重積分は x から積分しても y から積分しても良いという事を前に言った。ここではもう少し詳しくこの理由を考えてみる。

8.1　縦線形の領域上の積分

定理 8.1 D が縦線形の領域、つまり連続な関数 $\varphi(x) \le \psi(x)$ に対して

$$D = \{(x,y);\, a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

とかけるとき、(x と y の役割が入れ替わっても良い) $f(x,y)$ が $\overline{D}$ 上で連続ならば、

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で、従って積分可能で、

(2) 次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

証明 (1) $F(x+h) - F(x)$ を計算してみる。

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x+h,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\,dy \\
&\quad + \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\,dy \\
&\quad + \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x,y)\,dy \\
&:= I + II - III
\end{aligned}$$

$f(x,y)$ が有界閉集合 $\overline{D}$ 上で連続なので有界かつ一様連続として良く、このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $|h| + |k| < \delta$ ならば

$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| < \varepsilon$ が任意の $(x,y) \in D$ に対して成り立つ。これより、$|h| < \delta$ のとき

$$|I| < \varepsilon \times \max\{|\psi(x)| + |\varphi(x)|; a \le x \le b\}$$

また、$\overline{D}$ で f は連続なので有界になるので、$|f(x,y)| \le M$ が常に成り立つような M がとれて、

$$|II| \le M|\psi(x+h) - \psi(x)|, \qquad |III| \le M|\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

となる。$\psi(x), \varphi(x)$ は連続なので、II と III は $h \to 0$ のとき 0 に近づく。I は h が小さい時いくらでも小さいので、これも $h \to 0$ のとき 0 に行く。つまり $F(x)$ は連続。

(2) 長方形 $[a,b] \times [c,d]$ を D を含むように取り、$\tilde{f}$ で f を D の外で 0 になるように拡張したものとする。$[a,b]$ の分割 $\Delta_1 = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b\}$ と $[c,d]$ の分割 $\Delta_2 = \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d\}$ をとると、

$$\begin{aligned}
M_{i,j} &= \max\{\tilde{f}(x,y)\,;\, s_{i-1} \le x \le s_i,\, t_{j-1} \le y \le t_j\} \\
m_{i,j} &= \min\{\tilde{f}(x,y)\,;\, s_{i-1} \le x \le s_i,\, t_{j-1} \le y \le t_j\}
\end{aligned}$$

に対して $s_{i-1} \le x \le s_i$ ならば

$$\sum_j m_{i,j}|t_j - t_{j-1}| \le \int_c^d \tilde{f}(x,y)dy \le \sum_j M_{i,j}|t_j - t_{j-1}|$$

この各辺を $[s_{i-1}, s_i]$ で積分して、その後 i について加えると

$$\underline{S}_\Delta \le \int_a^b F(x)\,dx \le \overline{S}_\Delta$$

となる。ただし、 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. あとは $\tilde{f}$ が $[a,b] \times [c,d]$ で積分可能なことを言えばよいが、D の中では $\tilde{f} = f$ なので連続で、$M_{i,j} - m_{i,j}$ はどこででも一様に小さい。D の外では $\tilde{f} = 0$ なので、$M_{i,j} = m_{i,j} = 0$ だから、$[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ のうち、$y = \psi(x), y = \varphi(x)$ と重なるものが問題。このような i,j では $m_{i,j} = 0$ だが $M_{i,j}$ は大きい可能性がある。従って $y = \psi(x), y = \varphi(x)$ の一様連続性から

$$\begin{aligned}
\overline{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta \le& \varepsilon(b-a)(d-c) \\
&+ M \times (\max\{|\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')|\,;\, |x - x'| \le \delta\} + 2\delta)
\end{aligned}$$

が $|\Delta| \le \delta$ の時に成り立つ。

□

8.2 積分順序の交換

上の定理から積分の順序を交換しても良いことが分かる。縦線形の領域で x と y が入れ替わった話をすれば良いだけである。

例 8.1 積分域の書き直し 積分の順番を入れ換えると累次積分の積分の範囲が変わる。このことに注意して次の積分の順番を入れ換えてみる。

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx$$

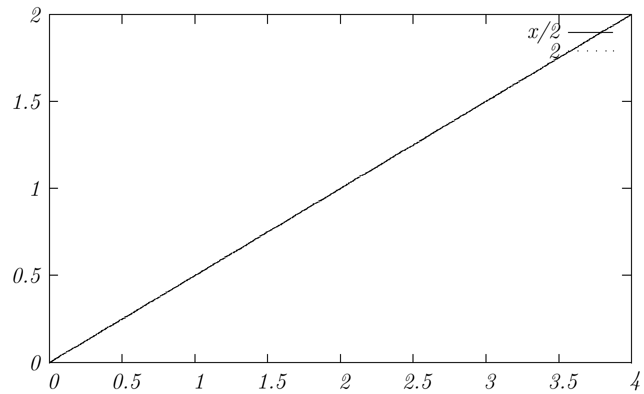
この場合、 y の動ける範囲は $0 \le y \le 2$ であり、$\frac{x}{2} \le y$ および $0 \le x \le 4$ より、

$$0 \le x \le 2y$$

が出てくる。したがってこの場合は簡単で、

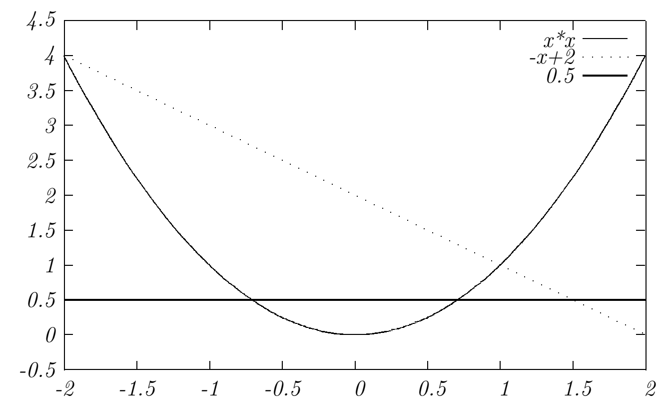
$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

となる。



例 8.2 D を $y = x^2$, $y = -x+2$, $y = \frac{1}{2}$ で囲まれた領域として $\int_D xy\,dxdy$ を計算する。図より $y = -x+2$ と $y = x^2$ の交点は $(-2,4),(1,1)$ でどちらも $y = 1/2$ の上にあるので、x で先に積分した方が積分範囲の分解が簡単。

$$\begin{aligned}
\int_D xy\,dxdy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\,dxdy \\
&\quad + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{-y+2} xy\,dxdy \\
&= \int_1^4 ((2-y)^2 - y)y dy = \int_1^4 (4y - 5y^2 + y^3)\,dy = -\frac{45}{4}
\end{aligned}$$



練習 8.1 次の積分順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dxdy$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x,y)\,dydx$ (4) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \int_{x^3}^x f(x,y)\,dydx$