9　広義重積分

9.1　面積確定な領域

D を有界な集合とし、R は D を含む長方形とする。$R=[a,b]\times[c,d]$ と書いて、$[a,b]$ の分割 $\Delta_1=\{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=b\}$ と $[c,d]$ の分割 $\Delta_2=\{c=t_0<\ldots<t_n=d\}$ をいつものように取る。分割 $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ の要素の一つ $C_{i,j}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]$ について考えてみる。

(1) $C_{i,j}\subset D$ のときは $1_D=1$ が $C_{i,j}$ 上どこででも成り立つ。

(2) また、$C_{i,j}\subset D^c$ の時は $1_D=0$ が $C_{i,j}$ 上どこででも成り立つ。

(3) そのどちらでもない時は $C_{i,j}$ は D の点も D^c の点も含んでいる。

$$M_{i,j}=\max\{1_D(x,y);(x,y)\in C_{i,j}\},\quad m_{i,j}=\min\{1_D(x,y);(x,y)\in C_{i,j}\}$$

とかくと、(1) のときは $M_{i,j}=m_{i,j}=1$, (2) のときは $M_{i,j}=m_{i,j}=0$ であり、(3) の時だけ違いが出てきて $M_{i,j}=1,\ m_{i,j}=0$ となる。

このことから、1_D に対する上方和

$$\overline{S}_\Delta=\sum_{i,j}M_{i,j}|C_{i,j}|\quad(|C_{i,j}|\text{ は }C_{i,j}\text{ の面積})$$

は D と交わりのある $C_{i,j}$ すべての面積を加えたもので、下方和

$$\underline{S}_\Delta=\sum_{i,j}m_{i,j}|C_{i,j}|$$

は D に含まれる $C_{i,j}$ 達すべての面積を加えたものとなる。

1_D が積分可能の時、$\int_R 1_D(x,y)dxdy$ が D の面積を表しているといって良いだろう。これが面積確定と呼ぶ意味である。

定理 9.1 D を $\mathbb{R}^2$ 内の有界な領域として、∂D が有限個の C^1 曲線からなる時、D は面積確定である。

証明　簡単のため ∂D が 1 個の C^1 曲線

$$C: x=x(u), y=y(u), 0\le u\le 1,\quad (x(1),y(1))=(x(0),y(0))$$

の時を考える。D を含む長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ をとり、$[a,b]$ の分割 $\Delta_1=\{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=b\}$ および $[c,d]$ の分割 $\Delta_2=\{c=t_0<$

$t_1<\ldots<t_n=d\}$ をとる。$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ は R の分割となる。このとき $1_D(x,y)$ に対する上方和と下方和の差は分割 Δ の要素のうち、C と交わっているものの面積の和である。

いま、任意の $\varepsilon\le|\Delta|$ に対して C の連続性から $u,v\in[0,1]$ が $|u-v|<\delta$ ならば $|x(u)-x(v)|<\varepsilon$ および、$|y(u)-y(v)|<\varepsilon$ とできるので、$n\delta>1$ となる n に対して $[0,1]$ の n 等分点を $0=u_0<u_1<\ldots<u_n=1$ と取る。($u_k=\frac{k}{n}$ である。) $(x(u_0),y(u_0)),(x(u_1),y(u_1)),\ldots,(x(u_n),y(u_n))$ を順次結んでできる折れ線を C_n とする。C_n は C から距離 ε 以内に収まっている。このとき、R の分割の要素のうち、曲線 C と交わるものは C から距離 $|\Delta|$ 以内に入るものばかりなので、C_n からは距離 $2|\Delta|$ 以内で、C_n から距離 $2|\Delta|$ 以内にある点はこの折れ線の各線分 $(x(u_i),y(u_i)),(x(u_{i+1}),y(u_{i+1}))$ を中心にして幅 $4|\Delta|$ の長方形の和集合の中に入るので、その面積は $4|C_n||\Delta|$ 以下となる。$|\Delta|\to 0$ $(n\to\infty)$ のとき、C_n の長さ $|C_n|$ は C の長さ

$$|C|=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dy(u)}{du}\right)^2}du$$

に収束するので、$4|C_n||\Delta|\to 0$ となる。したがって、1_D は積分可能。□

9.2　広義重積分

集合 D に対して、D の近似列 $\{K_n\}$ とは次を満たす面積確定な集合 K_n の列の事を言う。

(1) $K_1\subset K_2\subset\ldots\subset D$

(2) 各 K_n は有界閉集合

(3) 任意の有界閉集合 $F\subset D$ は、ある n で $F\subset K_n$ となる。

(3) より、D の任意の点は有界閉集合だから、$\cup K_n$ に含まれるので、(1) とあわせると、

$$\bigcup_{n=1}^\infty K_n=D$$

がわかる。

f が D に含まれる任意の有界閉集合上で積分可能な時、さらに、D の任意の近似列 K_n に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}f(x,y)\,dxdy$$

か存在して、しかもその値が近似列 $\{K_n\}$ の取り方によらないとき、f は D 上**広義積分可能**であると言う。

例 9.1 $f(x)$ が非負で D のある近似列 $\{K_n^*\}$ について各 K_n 上で積分可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n^*} f(x,y)\,dxdy = J$$

が存在するならば、実は D 上で広義積分可能である。これを証明しておこう。

まず、f が非負なので、$K, K' \subset D$ が有界閉集合として、f は K, K' 上でも積分可能の時、$K \subset K'$ ならば

$$\int_K f(x,y)\,dxdy \le \int_{K'} f(x,y)\,dxdy$$

である。これは、上方和と下方和を考えれば良い。そこで、いま、 D の任意の近似列 $\{K_n\}$ をとってくると、任意の n について K_n は D の有界な閉部分集合なので近似列の定義によりある m がとれて $K_n \le K_m^*$ となる。したがって

$$\int_{K_n} f(x,y)\,dxdy \le \int_{K_m^*} f(x,y)\,dxdy \le \int_{K_{m+1}^*} f(x,y)\,dxdy \le \ldots \to J$$

なので、

$$\limsup_{n\to\infty} f(x,y)\,dxdy \le J$$

$\{K_n\}$ が近似列である事を使うと、任意の m に対して

$$\int_{K_m^*} f(x,y)\,dxdy \le \liminf_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,dxdy$$ [2]

が上と同じように成り立ち、$m \to \infty$ とすると、

$$J \le \liminf_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,dxdy \le \limsup_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,dxdy \le J$$

となり、これは 極限が近似列の取り方によらずに J である事を言っている。 □

[2]数列 $\{a_n\}$ に対して $\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ とおくと、$\underline{a}_n$ は n とともに増加する。したがって、極限を持つ。これを $\{a_n\}$ の下極限とよび $\liminf_{n\to\infty} a_n$ と書く。同様に $\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ とおくと、これは n とともに減少する。したがって極限があり、これを $\{a_n\}$ の上極限とよび $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と書く。

実は、 f の広義積分可能性は $|f|$ の広義積分可能性と同じである事が知られている。

例 9.2

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dx}{1+x^2}\int_0^N \frac{dy}{1+y^2}\\ &= \lim_{N\to\infty}(\tan^{-1} N)^2 = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

練習 9.1 次の広義重積分が収束する事を証明せよ。

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}dydx$$