第1章　確率空間と確率変数

1.1　確率空間

1.1.1　事象

確率を考えるには、「何か」が起こるのかどうかをどうしても知りたいという動機がある事が多い。起こるかどうかは予測できないが、なんとか合理的に予測するために「確率」という概念が有効である。

例えば天気予報である。明日外出するが、濡れると困る。傘を持って行けば良いのだが、それはそれで荷物になり、行動の自由が妨げられ、できれば持って行きたくない。そこで天気予報を見てみる。「明日は晴れます」と予報が言っていれば、最近ではまず傘を持って行く必要は無い。[1]

したがって、我々は確率論を始めるにあたり、どのような出来事の確率を知りたいか決めてから話を始める事が多い。例えば、サイコロを投げた時の出た目の数が何か、続けて投げた時の出た目を並べた列がどうなっているか、宝くじを１０枚買うときそれぞれのクジが何等かにあたるか、などが典型的な出来事の例としてあげる事ができる。このとき、すべての可能な結果をすべて集めたものが**全事象**とよばれ Ω で表される。例えば、サイコロを１回投げた時、起こり得る結果のすべては出た目の数が $\{1,2,3,4,5,6\}$ のうちのどれかになる事である。それぞれの結果を**根源事象** という。この例では 1 から 6 までの自然数が根源事象となる。この時は $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ととることになる。また、サイコロを２回投げた時の結果は 1 回目の結果と 2 回目の結果を組で表して

$$\Omega=\{(i,j);i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

[1] １０回に１回かそこらは外れるとしてもまず大丈夫であると判断する。「確率１０％以下で雨が降る」とか、「９０％以上の確率で雨は降らない」とか言うように我々は使っている。我々はこの１０％というのを参考にして、どうしても濡れたくない事情と勘案して傘を持って行くか否かを最終的に決断している。もちろん確率１０％の降水予報が前回外れたからといって、そのあと９回はあたると言うものでは無い事も、我々は知っている。

と表す事になる。根源事象は結果を並べた組 (i,j) のそれぞれである。

このように、全事象とは何かを決めてから確率論を展開すれば何の問題も起こらないが、途中で他の事も同時に考えたくなった時に、また最初から全事象を取り直す必要が出てくる。こういう事は面倒なので、全事象 Ω は**抽象的に与えられた空でない集合** と理解するのが便利である。出来事 A が起きるかどうかは、Ω の要素（根源事象）ω が実現した時、ω が A の要素であったら A が起きており、そうでなかったら（$\omega\notin A$ となるが、このとき）A が起きていないと理解する事にする。つまり、Ω は考えたい出来事をすべて部分集合とするような集合と理解する事になる[2]。

出来事 A を Ω の部分集合と理解する事の利点は、複数の出来事を組み合わせた出来事を集合演算で表現できる事である。

A^c	A が起きない
$A\cup B$	A か B のどちらかが起きる
$A\cap B$	A と B が同時に起きる
$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$	A_1 から A_n までのどれかが起きる
$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$	A_1 から A_n までのすべてが起きる
$A_1\cup A_2\cup\ldots$	$A_n,n=1,2,\ldots$ のうちのどれかが起きる
$A_1\cap A_2\cap\ldots$	$A_n,n=1,2,\ldots$ のすべてが起きる

このように、確率論は集合論に基礎を持っている。一方で、それぞれの出来事 A にはその確率 $P(A)$ を一緒に考えるので、集合論だけでは確率を語る事はできない。以後に述べて行くように、Ω の部分集合すべてに確率を考える事ができるとは限らない事情が出てくるので[3]**確率を考える事のできる事象の全体**を扱う必要がある。これが次で紹介する σ-加法族 $\mathcal{F}$ である。

1.1.2　σ-加法族 $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合のつくる σ-加法族として与えられているものとする[4]。つまり、$\mathcal{F}$ は次を満たしている。

[2] そのままこれを想像しようとすると混乱する。むしろ、Ω はバカでかい集合だとだけ理解する方がよい。それでも気になる人には Ω としては $[0,1]$ 区間をとると思っていただければよい。今後展開する確率論は、実は $[0,1]$ 区間上定義された可測関数達と可測集合達により表される事が良く知られている。

[3] $[0,1]$ 区間上でルベーグ非可測集合がある事に対応している。

[4] $[0,1]$ 区間を考える時はルベーグ可測集合族を $\mathcal{F}$ としてとる。

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

(c) $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$ ならば $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

一般に、確率論ではたくさんの異なる σ-加法族を考える事が多い。次の命題は、基本的な役割を果たす。

命題 1.1 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ がともに Ω の σ-加法族 ならば

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{H} := \{A \subset \Omega \,;\, A \in \mathcal{G} \text{ かつ } A \in \mathcal{H}\}$$

はふたたび Ω の σ-加法族である。

証明　条件 (a)〜(c) を $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ について順番に確認すれば良い。
(a) $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ がそれぞれ (a) をみたすので、$\Omega \in \mathcal{G}$ かつ $\Omega \in \mathcal{H}$ であり、定義より $\Omega \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ である。
(b) $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ ならば (b) より、$A \in \mathcal{G}$ より $A^c \in \mathcal{G}$ と $A \in \mathcal{H}$ より $A^c \in \mathcal{H}$ となり、$A^c \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ を得る。
(c) 任意の $n \geq 1$ について $A_n \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ ならば (c) より、$\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{G}$ かつ $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{H}$ となるので、

$$\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$$

となり、確かに $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ は Ω の σ-加法族である。　□

練習問題 1.1 上の命題の証明は σ-加法族がいくつあっても同様に議論できる。Ω の σ-加法族の集まり $\{\mathcal{F}_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ (Λ は非可算集合でもよい。) に対して

$$\cap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$$

も Ω の σ-加法族となることを証明せよ。

1.1.3　集合族から生成される σ-加法族

命題 1.2 $\mathcal{C}$ を Ω の部分集合のある族とする。このとき、

$$\mathcal{C} \text{ を含む最小の } \sigma\text{-加法族}$$

が存在する。これを $\sigma[\mathcal{C}]$ とかき、$\mathcal{C}$ から**生成された** σ-加法族と呼ぶ。

証明　上の練習問題 1.1 を使う。$\mathbb{F}$ で $\mathcal{C}$ を含む Ω の σ-加法族の全体を表す事にする。つまり、

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{G} \,;\, \mathcal{G} \text{ は } \mathcal{C} \text{ を含む } \Omega \text{ の } \sigma\text{-加法族}\}$$

このとき、上の練習問題 1.1 により、

$$\mathcal{M} := \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathbb{F}} \mathcal{G}$$

は Ω の σ-加法族となるが、条件からそれぞれの $\mathcal{G}$ が $\mathcal{C}$ を含んでいるので、共通部分も $\mathcal{C}$ を含む。これより $\mathcal{M} \in \mathbb{F}$ がわかる。定義より、共通部分だから任意の $\mathcal{G} \in \mathbb{F}$ に対して $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ がわかる。したがって $\mathcal{M}$ は $\mathcal{C}$ を含む σ-加法族のうち、最小のものである。

この議論で一つだけ穴がある。それは $\mathbb{F} = \emptyset$ ならば上の議論は成り立たない事である。そこで、$\mathbb{F} \neq \emptyset$ である事を次のように言う。

$$\mathcal{P} = \Omega \text{ の部分集合の全体}$$

とおくと、これは Ω の σ-加法族であるので、少なくとも $\mathbb{F}$ は $\mathcal{P}$ を含んでおり、空でない。　□

練習問題 1.2 $\mathcal{P} = \Omega$ の部分集合の全体　が Ω の σ-加法族であることを確かめよ。

補題 1.3 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を Ω の部分集合族とする。いま、$\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$ であるならば

$$\sigma[\mathcal{C}_1] \supset \sigma[\mathcal{C}_2]$$

である。

証明　定義から $\sigma[\mathcal{C}_1] \supset \mathcal{C}_1$ で、仮定から $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$ だから、$\sigma[\mathcal{C}_1]$ は $\mathcal{C}_2$ を含む (Ω の) σ-加法族。したがって、$\sigma[\mathcal{C}_2]$ の最小性から

$$\sigma[\mathcal{C}_1] \supset \sigma[\mathcal{C}_2]$$

□