2.2　確率変数列の収束

2.2.1　確率収束、平均収束、概収束、法則収束

確率変数の収束にはいろいろなレベルがある、前節で見た大数の弱法則は確率収束と呼ばれる収束を言っている。

定義 2.4 (確率収束)　確率変数列 X_n が確率変数 Z に **確率収束**するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - Z| > \varepsilon) = 0 \tag{2.9}$$

が成り立つ時に言う。

これより強い意味の収束として**平均収束**がある。

定義 2.5 (平均収束)　$p > 0$ とする。確率変数列 X_n が確率変数 Z に p **次平均収束**するとは、

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - Z|^p\right] = 0 \tag{2.10}$$

が成り立つ時に言う。

補題 2.4　確率変数列 X_n が確率変数 Z に p 次平均収束するならば X_n は Z に確率収束している。

証明　任意に $\varepsilon > 0$ をとるとき、チェビシェフの不等式により

$$P(|X_n - Z| > \varepsilon) \le \frac{E\left[|X_n - Z|^p\right]}{\varepsilon}$$

右辺分子は仮定から $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。 □

これらの収束よりもより直感に訴える収束は概収束である。これはサンプル毎の収束を言っており、確率 1 で起こる収束を言っている。

定義 2.6 (概収束)　確率変数列 X_n が確率変数 Z に **概収束**するとは

$$P\left(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - Z(\omega)| = 0\right) = 1$$

が成り立つ時に言う。

Lebesgue の収束定理により、ある p 次可積分な確率変数 $Y \ge 0$ があって、 $X_n \le Y\ a.s.$ がすべての n で成り立っていれば、概収束から p 次平均収束がでる。

これらの収束はすべて同じ確率空間の上の収束であるが、分布だけが収束するような収束もある。したがって確率変数列も同じ確率空間に定義されていなくても良い。

定義 2.7 (法則収束)　確率変数 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が確率変数 X に法則収束するとは、任意の有界な連続関数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

が成り立つ時に言う。

補題 2.5　$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X に確率収束していれば法則収束している。

証明　$|f| \le K$ とする。まず、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$M > 1$ を

$$P(|X| \ge M) < \frac{\varepsilon}{6K}$$

となるように取っておく。f は連続なので、有界な閉区間 $[-2M, 2M]$ 上では一様連続で、$u, v \in [-2M, 2M]$ が $|u - v| < \delta$ のとき、

$$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるように $0 < \delta \le 1$ をとることができる。X_n は X に確率収束しているので、n が大きい時、

$$P(|X_n - X| > \delta) < \frac{\varepsilon}{6K}$$

とできる。このとき、

$$\begin{aligned}
|Ef(X_n) - Ef(X)| &\le E\left[|f(X_n) - f(X)|\,;\, |X_n - X| < \delta\right] + 2KP(|X_n - X| \ge \delta) \\
&\le E\left[|f(X_n) - f(X)|\,;\, |X_n - X| < \delta, |X| \le M\right] + 2KP(|X| \ge M) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2.2.2　確率 1 でおこること

二つの確率変数 X, Y について $X(\omega) \ne Y(\omega)$ となる ω の集合の確率が 0 ならば，X と Y の確率的挙動は区別できない．このようなとき,「X と Y は確率 1 で等しい」という．式で表すと

$$P(X = Y) = 1 \quad \text{あるいは} \quad X = Y \text{ a.e.}$$

と書く．a.e は almost everywhere の略である．この a.e. はよく使う．例えば $P(X_n \to X) = 1$ となるとき，X_n は X に**概収束**するというが，Lebesgue の優収束定理は

$$|X_n| \le Y \text{ a.e.},\ X_n \to X \text{ a.e.}, EY < \infty \text{ ならば} \quad \lim_{n\to\infty} EX_n = EX$$

とかくことができる．

例 2.1　$\Omega = [0, 1]$，$\mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1] = \{B \in \mathcal{B}; B \subset [0, 1]\}$，$P = Lebesgue$ 測度 とする．確率変数 X, Y を

$$X(\omega) = 1\ \forall\omega \in [0, 1], \quad Y(\omega) = \begin{cases} 8 & if\ \omega = \frac{1}{2}, \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

このとき，

$$P(X \ne Y) = P(\{\frac{1}{2}\}) = 0$$

なので，　$X = Y\ a.e.$ である．

例 2.2　さいころを無限回振り続けるとき，いつまで待っても 6 の目が出ないという**論理的可能性**はある．こんなことも論理的には可能である．しかし，実際問題としてこんなことは起こりそうもない．これは，このような出来事が起こる確率が 0 であるはずだと思わせる．

定理 2.6　(ボレル-カンテリ [Borel-Cantelli] の補題)

(i) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

を満たすならば，P-$a.e.$ の ω について，ある番号 $N(\omega)$ が存在して，$\omega \notin A_n \ \forall n > N(\omega)$.

(ii) 逆に，$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が独立で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

ならば，P-$a.e.$ の ω で，$\omega \in A_n$ となる n は無限に存在する

証明

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0 \tag{2.11}$$

を証明する．これが (i) を証明していることをまず確かめよう．$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とする．このとき，すべての n に対して $\omega \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ となる．したがってすべての n に対して $k \geq n$ がとれて $\omega \in A_k$ となる．これは $\omega \in A_k$ となる k が無限個あることを示す．また，$\omega \in A_k$ となる k が無限個あればすべての n に対してそれより大きい k で $\omega \in A_k$ となるものがあるので，$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ したがって，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega;\ \text{無限個の } k \text{ に対して } \omega \in A_k\}$$

(2.11) がいえたら，確率 1 で有限個の k についてのみ $\omega \in A_k$ となる．このときは $\omega \in A_k$ となる最後の番号がある．この番号を $N(\omega)$ と書けばいい．

(2.11) を証明しよう．条件から無限級数が収束するので $n \to \infty$ のとき，$\sum_{k \geq n} P(A_k) \to 0$. したがって $\bigcup_{k \geq n} A_k$ が n について単調に減少するので，確率の連続性から

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k) = 0$$

(ii) を証明しよう今度は

$$P(\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right\}^c) = 0 \tag{2.12}$$

を示す．

$$\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\right\}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k^c$$

なので，$\bigcap_{k \geq n} A_k^c$ が単調に n について増加するから，確率の連続性から

$$P(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k\right\}^c) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) \tag{2.13}$$

および，$\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c$ が m について減少するので確率の連続性から

$$P(\bigcap_{k \geq n} A_k^c) = \lim_{m \to \infty} P(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c) \tag{2.14}$$

$\{A_k\}$ が独立なとき，$\{A_k^c\}$ も独立なので，

$$P(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k))$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq 1 - x \leq e^{-x}$ が成り立つので，上の式にこれを代入すると

$$P(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k^c) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = \exp\{-\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)\} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

が仮定から得られる．(2.13, 2.14) からこれは (2.12) を意味する．

練習問題 2.4 さいころを振り続けることを考える．n 回目にでた目の数を X_n と書くと，$\{X_n\}$ は独立，同分布の確率変数列になる．ボレル-カンテリの第 2 補題 (Theorem 2.6, (ii)) により，確率 1 で無限個の n について $X_n = 6$ が起こることを確かめよ．したがってもちろん 6 の目はいつかは必ず（正確には確率 1 で）出るといっていい.（ヒント：$A_n = \{X_n = 6\}$ とおく.）

練習問題 2.5 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ が独立なとき，$\{A_n^c\}$ も独立なことを次のような手順でいうことにする．独立性の定義から，任意有限個の $A_{n_1}^c, \ldots, A_{n_p}^c$ に対して

$$P(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_p}^c) = \prod_{j=1}^{p} P(A_j^c) \tag{2.15}$$

が成り立つことを言えばよい．$p = 1$ のときは自明．一般の p に対して (2.15) を証明するために，もう少し一般に $0 \leq k \leq p$ に対して

$$P(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+1}} \cap \ldots \cap A_p) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j^c) \prod_{i=k+1}^{p} P(A_{n_i}) \tag{2.16}$$

($k = 0$ のときは右辺は $\prod_{i=1}^{p} P(A_{n_i})$ と理解) を示す．$k = p$ のときが (2.15) である．$\{A_n\}$ の独立性から，任意の p に対して $k = 0$ のときは (2.16) が成り立っている．したがって $p = 1$ のときはこの式も自明に成り立っている．$p \leq N - 1$ のとき (2.16) が正しいと仮定して $p = N$ のときも正しいことを示そう．これをさらに k についての帰納法で (2.16) を示そう．(2.16) が k で正しいとして，

$$\begin{aligned}
&\left(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+1}} \cap \ldots \cap A_{n_N}\right) \\
&\cup \left(A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_{k+1}}^c \cap A_{n_{k+2}} \cap \ldots \cap A_{n_N}\right) \\
= \ &A_{n_1}^c \cap \ldots \cap A_{n_k}^c \cap A_{n_{k+2}} \cap \ldots \cap A_{n_N}
\end{aligned}$$

であることを用いて (2.16) が $k + 1$ でも正しいことを証明せよ．