1.1.4 確率と確率空間

さて、全体集合（全事象）Ω とその σ-加法族 $\mathcal{F}$ が与えられると、その上で確率を考える事ができる。原始的な意味で直感に沿う確率の定義は **正値性** と**全事象の確率は** 1 と言う事 および**加法性**であろう。

確率は $\mathcal{F}$ の元にのみ対して考える事にするが、このとき、最初の二つの条件は

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \tag{1.1}$$

および

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.2}$$

という式で表される。最後の加法性とは、$A, B \in \mathcal{F}$ が同時に起こらないならば、A または B のどちらかが起こる確率はそれぞれの確率の和になるというもので、式で書くと次のようになる。

$$A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.3}$$

ただ、Lebesgue 積分で経験したように、集合の無限個の和を考える必要が確率論でも良く出てくる。そこで A.N.Kolmogorov[5] の提唱にしたがって次の σ-加法性を P に仮定するのが通常である。

$$A_n \in \mathcal{F}, (n \geq 1), \quad A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) \tag{1.4}$$

(1.4) で、$A_n = \emptyset, n \geq 1$ とおくことができるので、

$$P(\emptyset) = \infty \cdot P(\emptyset) \leq 1$$

これが成り立つのは $P(\emptyset) = 0$ の時に限る。したがって、$P(\emptyset) = 0$ だが、これより、再び $A \cap B = \emptyset$ のとき $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$ とおくと、(1.4) から

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となり、(1.3) が得られる。つまり、(1.4) は (1.3) を含む条件である。

[5]Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer 1933, 英訳 Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing Company 1950

命題 1.4 $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \supset B$ を満たすならば $P(A) \geq P(B)$ である。

証明 (1.3) をつかう。$A \supset B$ のとき、$A = B \cup (A \cap B^c)$ と分ける事ができ、$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ だから、(1.3) により、

$$P(A) = P(B) + P(A \cap B^c)$$

確率はそれぞれ非負だから、右辺は $P(B)$ 以上。したがって

$$P(A) \geq P(B)$$

が示せた。 □

系 1.5 $A, B \in \mathcal{F}$ のとき、

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

証明

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$

で、右辺の二つの集合は排反（共通部分が空集合）だから、(1.3) により、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

また、$B \cap A^c \subset B$ なので、命題 1.4 により、$P(B \cap A^c) \leq P(B)$ あわせると系の主張が示されている。 □

命題 1.6 (確率の連続性) $A_n \in \mathcal{F}$ が 単調に減少しているとき、

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$$

逆に、$A_n \in \mathcal{F}$ が単調に増大しているとき、

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$$

が成り立つ。

証明 まず、A_n が単調減少とする。このとき、$B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ とおくと、任意の $n \geq 1$ について

$$A_n = B_n \cup B_{n+1} \cup \ldots = \bigcup_{j=n}^{\infty} B_j \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

が成り立つ。$\{B_j, 1 \leq j, \cap_{n \geq 1} A_n\}$ は互いに素、どの二つも共通部分は空集合なので、

$$P(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} P(B_j) + P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$n = 1$ のときの上の式から $P(B_n)$ の和は収束するので、

$$\sum_{j=n}^{\infty} P(B_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となり、

$$P(A_n) \to P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

A_n が単調増大の時は A_n^c が単調減少なので、上の事から

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c)$$

で、

$$1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

とあわせると後半が言える。 □

組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**と呼ぶ。以下、常に確率空間は与えられているものとして話を進める。

練習問題 1.3 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$ のとき、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成り立つ事を示せ。(このためには $B_n = A_n \cap (A_1 \cup \ldots A_{n-1})^c$ を考えると良い。)

1.2 確率変数

定義 1.1 X が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数であるとは X は Ω から実数への写像であり、可測性：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega \,;\, X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つ時に言う。

Borel σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ の開集合の全体 $\mathcal{O}$ から生成される $\mathbb{R}$ の σ-加法族を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とかく。

補題 1.7

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\{(-\infty, a] \,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

証明 補題 1.3 を使う。まず、$(-\infty, a + \frac{1}{n})$ は開区間だから開集合で、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元で、

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n})$$

であるので、これも σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元。したがって、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \{(-\infty, a] \,;\, a \in \mathbb{R}\}$$

したがって補題 1.3 により、

$$\sigma[\mathcal{B}(\mathbb{R})] \supset \sigma[\{(-\infty, a] \,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

だが、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を含む最小の σ-加法族なので、$\sigma[\mathcal{B}(\mathbb{R})] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるので、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma[\{(-\infty, a] \,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

逆の包含関係をいう。$a < b$ に対して

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$$

だから

$$(a, b] \in \sigma[\{(-\infty, a] \,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$