1.2　確率変数

定義 1.1 X が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数であるとは X は Ω から実数への写像であり、可測性：任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つ時に言う。

Borel σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$　$\mathbb{R}$ の開集合の全体 $\mathcal{O}$ から生成される $\mathbb{R}$ の σ-加法族を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とかく。

補題 1.7

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

証明　補題 1.3 を使う。まず、$(-\infty, a + \frac{1}{n})$ は開区間だから開集合で、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元で、

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n})$$

であるので、これも σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元。したがって、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}$$

したがって補題 1.3 により、

$$\sigma[\mathcal{B}(\mathbb{R})] \supset \sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

だが、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を含む最小の σ-加法族なので、$\sigma[\mathcal{B}(\mathbb{R})] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるので、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

逆の包含関係をいう。$a < b$ に対して

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$$

だから

$$(a, b] \in \sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

これより、

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$$

とかけるので、開区間は $\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$ の元。任意の開集合は開区間の可算個の和集合で書けるので、これも $\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$ の元である。したがって

$$\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}] \supset \mathcal{O}$$

これから補題 1.3 により、

$$\sigma\,[\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]] \supset \sigma[\mathcal{O}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$ はこれを含む最小の σ-加法族なので、

$$\sigma\,[\sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]] = \sigma[\{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\}]$$

これで逆の包含関係が示された。□

命題 1.8 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とするとき、X がこの上で定義された確率変数である事と、

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \mathit{for}\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

とは同値である。

証明　X を確率変数とする。

$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

とおく。補題 1.7 から $(-\infty, a]$ の形の集合は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるので、X が確率変数であることより、

$$\mathcal{G} \supset \{(-\infty, a]\,;\, a \in \mathbb{R}\} \tag{1.5}$$

ところで、

$$X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F}, \quad i.e. \mathbb{R} \in \mathcal{G},$$

また、$B \in \mathcal{G}$ のとき、$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ なので、

$$X^{-1}(B^c) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B^c\} = (X^{-1}(B))^c \in \mathcal{F},$$

ゆえに $B^c \in \mathcal{G}$ であり、$B_n \in \mathcal{G}, n = 1, 2, \ldots$ のとき、

$$X^{-1}(\cup_{n\geq 1} B_n) = \bigcup_{n\geq 1} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

となり、$\cup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{G}$ もいえて、$\mathcal{G}$ は $\mathbb{R}$ の σ-加法族でもある。しかも (1.5) から補題 1.7 により $\mathcal{G} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ だが、$\mathcal{G}$ の定義から反対の包含関係は自明。したがって、$\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ これは X が確率変数ならば任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ を言っている。逆にこれが成り立つなら X が確率変数である事は補題 1.7 から自明。 □

練習問題 1.4 Ω 上の実数値関数 X が有限個の値 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ しか取らない時、X が確率変数であることと、

$$X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F} \quad \mathit{for}\ i = 1, 2, \ldots, n$$

とは同値であることを証明せよ。

確率変数の性質についていくつか注意をしておく。確率変数の定義はルベーグ積分のときの可測関数の定義とほとんど同じである。違いはルベーグ可測集合の全体を考える変わりに $\mathcal{F}$ を使うところくらいである。したがって、

- 確率変数の線形結合はまた確率変数である。
- 確率変数が各点 ω で収束したら、その極限もまた確率変数となる。
- 各 $n \geq 1$ で X_n が確率変数ならば、$\sup_{n\geq 1} X_n(\omega)$, $\inf_{n\geq 1} X_n(\omega)$ も確率変数である。
- X が確率変数で、f がボレル可測関数のとき、

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

　と定義した Y もまた確率変数である。

1.3　期待値

期待値の定義　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は与えられているものとする．確率変数の**期待値**あるいは**平均値**と呼ばれる量を定義しよう．簡単な場合から順を追って定義していく．

(i) 確率変数 X が有限個の値しか取らない場合．
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ が X の可能な値の全体とする．このとき，

$$EX := \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i) \tag{1.6}$$

で X の期待値 EX を定義する．

(ii) 確率変数 X が非負の値を取る場合．
$n \geq 1$ に対して有限個の値しか取らない確率変数 X_n を

$$X_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n},\ 0 \leq k \leq n2^n - 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

と定義する．$n \to \infty$ のとき，$X_n(\omega)$ は単調に増大して $X(\omega)$ に収束する．このとき，

$$EX := \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.7}$$

$EX < \infty$ のとき，X は**可積分**であるという．

(iii) X が一般の確率変数の場合．

$$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$$

とおくと，この新しい確率変数 X^+, X^- はともに非負の値を取り，$X = X^+ - X^-$ とかける．X^+, X^- がともに可積分のとき X は**可積分**であるといい，このとき，

$$EX := EX^+ - EX^- \tag{1.8}$$

によって X の期待値 EX を定義する．

$X \equiv C$ (定数) のとき、定義から $EX = C$ が分かる。