1.3.1　期待値の性質

定理 1.9 (i) （線形性） X, Y が可積分な確率変数のとき，実数 a, b に対して $aX + bY$ も可積分な確率変数となり，

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

(ii) (σ-加法性） X が可積分な確率変数のとき，$A \in \mathcal{F}$ に対して

$$E[X; A] := E(X \cdot 1_A)$$

と定義し，X の A **上の期待値** と呼ぶ．このとき，$\{A_n; n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ が背反ならば，

$$E[X; \bigcup_{n \geq 1} A_n] = \sum_{n \geq 1} E[X; A_n]$$

(iii) （単調収束定理） $X_n, n \geq 1$ がすべて可積分な非負の確率変数で，

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots \leq X_n(\omega) \leq \ldots \nearrow X(\omega)$$

が確率 1 で成立するならば，

$$\lim_{n \to \infty} EX_n = EX$$

(iv) （Fatou の補題）$X_n, n \geq 1$ がすべて非負の確率変数のとき，

$$E[\liminf_{n \to \infty} X_n] \leq \liminf_{n \to \infty} EX_n$$

(v) （Lebesgue の収束定理）$X_n, n \geq 1$ がすべて可積分な確率変数で，ある可積分な確率変数 X と Y が存在して，

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \quad \forall n \geq 1, \qquad \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が確率 1 で成り立つならば，

$$\lim_{n \to \infty} EX_n = EX$$

証明は省略する.（西尾真喜子「確率論」参照）

1.3.2　期待値と分散に関する不等式

モーメント，分散

$n \geq 1$ に対して，$f(x) = x^n$ のとき，$Ef(X) = EX^n$ が定義できるとき，これを X の **n 次のモーメント**と呼ぶ．平均を引いて考えるとき，$E(X - EX)^n$ を X の **n 次の中心化モーメント**と呼ぶ．特に $n = 2$ のとき，$E(X - EX)^2$ は X の**分散**と呼ばれる重要な量で $V(X)$ と表される．確率変数 X の分散は

$$V(X) = E\left[\left(X - EX\right)^2\right]$$

と定義するが、EX が定数である事から

$$V(X) = E\left[X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2\right] = E(X^2) - (EX)^2$$

とも書ける事は良く知られている。

定理 1.10 （チェビシェフ [Chebyshev] の不等式）
$f(x)$ が非負単調非減少なとき，確率変数 X について $f(X)$ が可積分ならば，

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)} \tag{1.9}$$

が任意の $f(\lambda) > 0$ となる λ に対して成立する．

証明　$X(\omega) > \lambda$ のとき，$f(X(\omega)) > f(\lambda) > 0$ なので，

$$\frac{f(X(\omega))}{f(\lambda)} \geq 1$$

であり，この期待値を $\{X \geq \lambda\}$ 上で取ることにより，

$$E\big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}\big] \geq E\big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}; X \geq \lambda\big] \geq P(X \geq \lambda)$$

最初の不等式は f が非負なことから出る．期待値の線形性からこの式は (1.9) と同じ．

定理 1.11 （Hö1der の不等式） $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし，$|X|^p, |Y|^q$ がともに可積分とするとき，

$$|E[XY]| \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (E[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

とくに $p = 2$ のとき $q = 2$ となり、この式は Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれている。

証明　まず次の不等式を用意する．$x, y \geq 0$ のとき，

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy \tag{1.10}$$

この式の証明は後にして，定理を証明しよう．記号として，

$$\|X\|_p := \left\{E|X|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|Y\|_q := \left\{E|Y|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

と書くことにして，(1.10) で $x = \frac{|X(\omega)|}{\|X\|_p}$, $y = \frac{|Y(\omega)|}{\|Y\|_q}$ とおくと，

$$\frac{1}{p}\frac{|X(\omega)|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y(\omega)|^q}{E(|Y|^q)} \geq \frac{|X(\omega)Y(\omega)|}{\|X\|_p\|Y\|_q}$$

この式の期待値を取ると，

$$\frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 \geq \frac{E(|XY|)}{\|X\|_p\|Y\|_q}$$

左辺は仮定から 1 に等しいので，

$$\|X\|_p\|Y\|_q \geq E(|XY|)$$

を得るが，これは定理の主張している式と同じ．
最後に (1.10) を証明しよう．$x = 0$ のときはこの式は自明に正しい。$x > 0$ のときを考える。両辺を x^p で割った式は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\frac{y^q}{x^p} \geq \frac{y}{x^{p-1}}$$

仮定から $q = \frac{p}{p-1}$ だから，$x^p = (x^{p-1})^q$ なので，$\xi = \frac{y}{x^{p-1}}$ に対して，

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\xi^q \geq \xi$$

を示せばよい．$\xi \geq 0$ のときこの式は正しい．

練習問題 1.5　$X \geq 0$ が常に成り立つとする．このとき，$EX = 0$ ならば $P(X = 0) = 1$ となることを次の順で証明せよ．

(i)　自然数 $n \geq 1$ に対して $A_n \in \mathcal{F}$ を

$$A_n := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$$

とおく．このとき，

$$P(A_n) \leq nE[X; A_n] \leq nEX$$

を示せ．

(ii)　任意の自然数 n に対して $P(A_n) = 0$ を示せ．

(iii)　$\{\omega \in \Omega; X(\omega) > 0\} = \cup_{n\geq 1}A_n$ であることから $P(X > 0) = 0$ を示せ．(練習問題 1.3 を使う) これは $P(X = 0) = 1$ を示している．