1.4 分布

さて、いよいよ統計で良く出てくる分布の話に移ろう。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、X をその上の確率変数とする。このとき、$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の確率 μ_X を $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\})$$

と定義して、これを確率変数 X の**分布**と呼ぶ。μ_X が $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の確率測度になること、つまり、

(i) $\mu_X(\mathbb{R}) = 1$,

(ii) $\mu_X(B) \in [0,1] \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(iii) $\{A_n\}_{n \geq 1}$ が互いに排反ならば

$$\mu_X(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(B_n)$$

を確かめてみよう。$X^{-1}(\mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$ だから、

$$\mu_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$$

したがって、第一の条件は満たされている。また、P は確率なので、μ_X の定義から第 2 の条件が満たせれている事も明らか。$\{B_n\}$ を互いに排反な $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元とする。

$$X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)$$

であり、$n \neq m$ のとき

$$X^{-1}(B_n) \cap X^{-1}(B_m) = \{\omega \in \Omega\,; X(\omega) \in B_n,\, X(\omega) \in B_m\} = X^{-1}(B_n \cap B_m) = \emptyset$$

なので、P が確率であることから

$$\mu_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(B_n)$$

となり、μ_X の σ-加法性が分かった。これにより第 3 の条件も満たされており、μ_X は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の確率（測度）となる。

例 1.1 くじつきのガムがある．あたる確率は p であるという．買い続けてはじめてあたりを引くまでのガムを買う回数を X とするとき，X の分布を求めよ．

解 最初に買ったガムのクジがあたりだったとすると $X = 1$ で、この確率はあたる確率 p そのものである。$X = 2$ とは最初に買ったガムのクジが外れで、2 回目のクジがあたりである場合にあたり、この確率は $(1-p)p$ となる。同様にして

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\text{ 最初の } k-1 \text{ 回は外れ、最後の } k \text{ 回目に当たる}) \\ &= (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

がわかり、これが μ_X を与えている。μ_X は $\{1, 2, \ldots\}$ 上の確率で、

$$\mu_X(k) = (1-p)^{k-1} p$$

$X - 1$ の分布が成功の確率 p の**幾何分布** と呼ばれる。初めて当たるまでに何回外れのガムを買ったかがこの分布に従う

1.4.1 分布の例

この小節ではいくつかの分布の例を見る．最初の 3 つは離散分布の例であり，あとの 2 つは連続分布の例である．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は固定しておく．

離散分布 確率変数 X が整数などのような離散的な値しかとらないとき,（たとえばさいころをふったときの出る目の数）X の分布 μ_X はどのように表したらよいのであろうか？分布の定義からだとかえって難しそうに見える．整数に値をとる場合を例にとり考えてみる．それぞれの整数 k には，$X = k$ となる確率 $P(X = k) = p_k$ が与えられている．X が整数にしか値をとらないということは，

$$P(X \in \mathbf{Z}) = P(\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{X = k\}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} P(X = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$$

ということである．ここで，$k \neq \ell$ のとき，二つの事象 $\{X = k\}, \{X = \ell\}$ は排反であることに注意すると 2 番目の等式が成り立つ．ゆえに μ_X は次のようになる．$A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = P(X \in A \cap \mathbf{Z}) = \sum_{k \in A \cap \mathbf{Z}} p_k$$

したがって，離散的な値をとる確率変数に対しては，それぞれの値をとる確率を決めれば分布が決まることになる．幾何分布以外の離散的な値を取る分布の例をあげてみよう。

例 1.2　二項分布 $B(N,p)$
確率変数 X は，0 から N までの整数値のみを値として取り，$0<p<1$ に対して

$$P(X=k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k} \quad k=0,1,\dots,N$$

となっている．

平均と分散を求めてみよう。X は有限個の値 $0,1,\dots,n$ を取るので、平均値は

$$EX=\sum_{k=0}^{N}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{N}k\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$$

で与えられるので、

$$k\binom{N}{k}=\frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}=N\binom{N-1}{k-1}$$

を使うと

$$\begin{aligned}EX&=N\sum_{k=1}^{N}\binom{N-1}{k-1}p^k(1-p)^{N-1-(k-1)}\\&=Np(p+1-p)^{N-1}=Np\end{aligned}$$

分散は

$$V(X)=EX^2-(EX)^2=EX^2-(NP)^2$$

だから、EX^2 を計算すれば良く、

$$\begin{aligned}EX^2&=\sum_{k=1}^{N}k^2\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}\\&=\sum_{k=1}^{N}(k(k-1)+k)\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}\\&=N(N-1)p^2+pN\\&=N^2p^2+Np(1-p)\end{aligned}$$

なので、$V(X)=Np(1-p)$ がわかる。

例 1.3　ポアソン分布 $P(\lambda)$[6]
$\lambda>0$ に対して，確率変数 X は，0 以上の整数値を取り，

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k=0,1,\dots$$

となっている．平均と分散を求めてみよう。X が有限個の値を取る場合と基本的に同じで、

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

と計算する。これより、

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\&=\lambda\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}EX^2&=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\&=\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}+\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)e^{-\lambda}\\&=\lambda^2+\lambda\end{aligned}$$

だから、$V(X)=EX^2-(EX)^2=\lambda$ となる。

例 1.4　負の 2 項分布
確率変数 X は 0 以上の整数に値を取り，$n\geq 1, 0<p<1$ のとき

$$P(X=k)=\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k$$

となっている．$\binom{n+k-1}{k}$ は $f(x)=(1-x)^{-n}$ の原点におけるテイラー展開の x^k の係数。これは n 回目の成功までに失敗する回数の分布になっている。

[6]統計で良く出て来る分布の一つ．ポーランドの統計学者ボルトキービッツが示した例は有名．1875 年–1894 年の 20 年間にプロシャの 10 軍団で馬に蹴られて死んだ兵士の数の 1 年 1 軍団当たりの分布が $\lambda=0.61$ のポアソン分布でよく近似できている．— 篠崎信雄「統計解析入門」サイエンス社 を参照．また，W.Feller 著 An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc にもこの分布の応用の色々な例が書いてあり面白い．

平均と分散を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(n+k-1)\binom{n+k-2}{k-1}p^n(1-p)^k \\
&= np(1-p) + \sum_{k-1}^{\infty}(k-1)\binom{n+k-2}{k-1}p^n(1-p)^k \\
&= n(1-p) + (1-p)EX \\
&= \frac{n(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[k(k-1)+k\right]\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)(k-1)\binom{n+k-2}{k-1}p^n(1-p)^k + EX \\
&= \left[n(1-p)+1\right]EX + (1-p)EX^2 \\
&= \frac{(n(1-p)+1)n(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

なので、

$$V(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$