連続分布 確率変数 X が、区間 $[a,b]$, 半開区間 (a,∞)，実数全体 $\mathbf{R}$ などに値を取るとき，分布 μ_X は

$$\mu_X(A) = P(X \in A)$$

として定義すればよいから，こちらのほうが定義は簡単である．

例 1.5 正規分布 $N(m,v^2)$ [7]
確率変数 X は実数に値を取り，$m \in \mathbf{R}, v > 0$ のとき

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_A e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \quad A \in \mathcal{B}$$

となるとき、X は **平均** m, **分散** v の正規分布に従うといい、X の分布は $N(m,v)$ であると略記する。特に，$m=0, v=1$ のとき，分布 μ_X を **標準正規分布**という．

注意 1.12 X の分布が標準正規分布 $N(0,1)$ のとき，$a \neq 0, b \in \mathbf{R}$ に対して $Y = aX+b$ の分布は $N(b,a^2)$ となる．
実際， $a > 0$ として $\alpha < \beta$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mu_Y([\alpha,\beta]) &= P(\alpha \le aX+b \le \beta) \\
&= P(\frac{\alpha-b}{a} \le X \le \frac{\beta-b}{a}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-b}{a}}^{\frac{\beta-b}{a}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

ここで $y = ax+b$ と変数変換すると右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}} dy$$

となる．

[7]統計学におけるほとんどの理論はこの分布を基礎としている．別名をガウス (Gauss) 分布という．誤差の集積がこの分布に従うというガウスの発見にちなんだものと思われる．

X の分布が $N(m,v)$ のとき、X の平均と分散を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \\
&= m + \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (y = \frac{x-m}{\sqrt{v}} \text{ とおく}) \\
&= m \\
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \\
&= v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (y = \frac{x-m}{\sqrt{v}} \text{ とおく}) \\
&= v
\end{aligned}$$

例 1.6 指数分布 $\exp(\lambda)$
確率変数 X は 0 以上の実数に値を取り，$\lambda > 0$ のとき

$$P(X \in A) = \lambda \int_{A \cap [0,\infty)} e^{-\lambda x} dx \quad A \in \mathcal{B},$$

となる．

注意 1.13 X をパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布とする．$a, b > 0$ のとき，

$$P(X > a+b) = e^{-\lambda(a+b)} = P(X > a)P(X > b)$$

X は a を越えた後，さらに残った量 b をこえなければならないが，上の式はこの二つが独立に起こることを示している．条件付確率で書くと，

$$\begin{aligned}
P(X > a+b \mid X > a) &= \frac{P(X > a+b, X > a)}{P(X > a)} \\
&= \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = P(X > b)
\end{aligned}$$

という式で表され，指数分布の確率変数の**忘れっぽさ** *(memoryless property : lack of memory)* とよばれる式である．

パラメータ λ の指数分布の平均と分散を求めてみよう。X をパラメータ λ の指数分布に従う確率変数とする。

$$\begin{aligned}
EX &= \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \\
V(X) &= \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

例 1.7（ガンマ分布）　X がパラメータ $a>0$ のガンマ分布に従うとは $B\in\mathcal{B}([0,\infty))$ に対して

$$\mu_X(B)=P(X\in B)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_B x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

となる時にいう。

X がパラメータ $a>0$ のガンマ分布に従うとき、その平均と分散を求めよう。

$$EX=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=a$$
$$V(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)}-a^2=a$$

練習問題 1.6 例 1.2, 1.3, 1.4 で，すべての k について $P(X=k)$ の和を取ると 1 になることを確かめよ．ただし，$k>N$ のとき $\binom{N}{k}=0$ とする．

練習問題 1.7 例 1.5 において，$\mu_X(\mathbf{R})=1$ を確かめよ．また，例 1.6 で，$\mu_X([0,\infty))=1$ を確かめよ．