目 次

1 関数の極限と連続関数

実数の全体を $\mathbb{R}$ と書く。

定義 1.1（定義域・値域）
$\mathbb{R}$ の部分集合 D のそれぞれの要素（実数） x に対して一つの実数 y を対応させる対応の仕方

$$f : D \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}$$

が与えられている時、$y = f(x)$ と書き、 D を関数 $f(x)$ の**定義域**といい、定義域 D から f によって写される集合

$$f(D) = \{y;\ \text{ある } x \in D \text{ に対して } y = f(x) \text{ となる }\}$$

を関数 f の**値域**という。

関数の定義域としては、多くの場合 開区間 $\{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$ （簡単に (a, b) と書く）、または閉区間 $\{x \in \mathbf{R} :\ a \leq x \leq b\}$ （簡単に $[a, b]$ と書く）をとることが多い。
x が 区間 (a, b) に入ることを $x \in (a, b)$ と書く。これは $a < x < b$ と同じ事。(a, b) を実数の勝手な部分集合 A と代えても $x \in A$ は x が A の点になっている事を表す。(便利な記号)

定義 1.2（関数の極限） 関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されていて、x が a に限りなく近づく時、$f(x)$ がなにかある値 C に限りなく近づくならば、

$$「x \to a \text{ のとき、 } f(x) \to C」\text{、または } \lim_{x \to a} f(x) = C$$

と書く。

定理 1.1 $\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B$ ならば次が成り立つ。

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$

(2) $\lim_{x \to a} cf(x) = cA$ (c 定数),

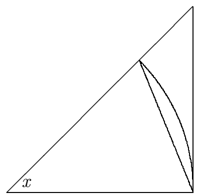
(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB,$

(4) $\lim_{x \to a} g(x)/f(x) = B/A$ $(A \neq 0)$

例 1.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

証明　下図より $\sin x \le x \le \tan x$ がわかる。



$\sin x/x$ は偶関数 $(x\neq 0)$ なので、$x>0, x\to 0$ のときを考えれば良い。x は 0 に近いので、$x<\pi/$ も仮定して良い。上の不等式からこのとき、

$$\frac{\sin x}{x}\le 1 \quad \text{および} \quad \cos x\le \frac{\sin x}{x}$$

が分かる。まとめると、

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x}\le 1$$

$x\to 0$ のとき $\cos x\to 1$ だからはさみうちの原理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

がいえる。

定義 1.3 (**連続関数**)　関数 $f(x)$ が $x=a$ の近くで定義されていて、

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

となるとき、$f(x)$ は $x=a$ で **連続**であるという。$\mathbb{R}$ の部分集合 A の各点で $f(x)$ が連続な時、$f(x)$ は A で連続であるという。

定理 1.1 から次が分かる。

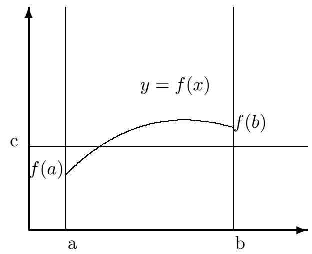
定理 1.2　関数 $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば、$f(x)\pm g(x), cf(x), f(x)g(x), g(x)/f(x)$ も $x=a$ で連続である。ただし、$g(x)/f(x)$ については、$f(a)\neq 0$ のときとする。

定理 1.3 (**連続関数の合成**)　$f(x)$ が $x=a$ で連続で $g(y)$ が $y=f(a)$ で連続な時、$h(x)=g\circ f(x):=g(f(x))$ は $x=a$ で連続である。

閉区間上の連続関数

閉区間上で連続な関数は特別に良い性質を持っている。

定理 1.4 (**中間値の定理**)　$f(x)$ は $[a,b]$ で連続とし、$f(a)\neq f(b)$ であるとすると、$f(x)$ は開区間 (a,b) で $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるすべての値をとる。



定理 1.5 (**最大値、最小値の定理**)　$f(x)$ は $[a,b]$ で連続とする。このとき、$f(x)$ は $[a,b]$ の点で最大値と最小値をとる。

練習 1.1 次の極限の値を求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ux-x-u}{x^2+2x-3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}x\cos x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 4x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-5})$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$