10 連鎖公式

合成関数の微分の 2 変数版を考える。

定理 10.1 (連鎖公式) D, E を $\mathbb{R}^2$ の領域として、$x(u,v), y(u,v)$ は $(u,v) \in D$ で u, v について偏微分可能とし、$f(x,y)$ は E で全微分可能とする。さらに、$(u,v) \in D$ ならば $(x(u,v), y(u,v)) \in E$ であるとすると、

$$H(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

は D で u, v について偏微分可能となり、次の**連鎖公式**が成り立つ。

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \tag{1}$$
$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \tag{2}$$

ただし、$x = x(u,v), y = y(u,v)$ である。

上の公式を形式的に $H(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ に対して

$$H_u = f_x x_u + f_y y_u \quad H_v = f_x x_v + f_y y_v$$

と書く事もできる。どちらが覚えやすいかは人により違うが、とにかく、覚えておいて欲しい。とくに、$x = x(t), y = y(t)$ と x, y が一つの変数の関数になっていると x, y の t に関する微分は x', y' とかけて、

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

という合成関数の微分の式として前にやったものと同じになる。とにかく $H = f(x,y)$ の微分には f_x, f_y の両方が現れる事に注意しよう。証明は合成関数の微分公式の証明と同じ。

証明

$$\begin{aligned}
&H(u+h,v) - H(u,v) \qquad (3)\\
&= f(x(u+h,v), y(u+h,v)) - f(x(u,v), y(u,v))\\
&= f_x(x(u,v), y(u,v))(x(u+h,v) - x(u,v))\\
&\quad + f_y(x(u,v), y(u,v))(y(u+h,v) - y(u,v)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

とかくと、f の全微分可能性から $h \to 0$ のとき

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(x(u+h,v) - x(u,v))^2 + (y(u+h,v) - y(u,v))^2}} \to 0$$

であり、したがって

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{h} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x(u+h,v) - x(u,v))^2 + (y(u+h,v) - y(u,v))^2}}\\
&\quad \times \sqrt{\left(\frac{x(u+h,v) - x(u,v)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(u+h,v) - y(u,v)}{h}\right)^2}
\end{aligned}$$

右辺は $h \to 0$ のとき 0 に近づく。(3) の両辺を h で割って $h \to 0$ とやると、

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

となる。ここで、正式には上の $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ や $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ の変数 x, y のところには $x = x(u,v), y = y(u,v)$ が入る。つまり、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u.v)) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$$

と書くのが正しい。 □

例 10.1 (教科書 p.166, 例 5)

$z = f(x,y)$ を C^2 級として、 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のときに次の二つの式を示す。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

まず、上の式を示そう。連鎖公式を $z = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$ として使う。

$$z_r = f_x x_r + f_y y_r, \quad z_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta \tag{4}$$

が連鎖公式から分かる。そこで、 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ なので、

$$x_r = \cos\theta,\ x_\theta = -r\sin\theta,\ y_r = \sin\theta,\ y_\theta = r\cos\theta$$

となり、

$$\begin{aligned}
z_r^2 &= (f_x\cos\theta + f_y\sin\theta)^2 = f_x^2\cos^2\theta + 2f_xf_y\cos\theta\sin\theta + f_y^2\sin^2\theta\\
z_\theta^2 &= (-f_xr\sin\theta + f_yr\cos\theta)^2 = r^2f_x^2\sin^2\theta - 2r^2f_xf_y\sin\theta\cos\theta + r^2f_y^2\cos^2\theta
\end{aligned}$$

したがって、

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2}z_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$$

$f_x = z_x, f_y = z_y$ と書き直せば求める式になる。

次に、下の式を示そう。f が C^2 級なので、偏微分の順序交換は自由である。(4) をそれぞれ r, θ で偏微分して、

$$\begin{aligned}
z_{rr} &= f_{xx}x_r^2 + f_{xy}x_ry_r + f_xx_{rr} + f_{yx}y_rx_r + f_{yy}y_r^2 + f_yy_{rr}\\
&= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta\\
z_{r\theta} &= f_{xx}x_rx_\theta + f_{xy}(x_ry_\theta + y_rx_\theta) + f_xx_{r\theta} + f_{yy}y_ry_\theta + f_yy_{r\theta}\\
&= r\left((-f_{xx} + f_{yy})\cos\theta\sin\theta + f_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) - f_x\sin\theta + f_y\cos\theta\\
z_{\theta\theta} &= f_{xx}(x_\theta)^2 + f_{xy}(x_ry_\theta + x_\theta y_r)f_xx_{\theta\theta} + f_{yy}(y_\theta)^2 + f_yy_{\theta\theta}\\
&= r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - r(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta)
\end{aligned}$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
&z_{rr}+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}\\
&=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta+f_{xx}\sin^2\theta\\
&\qquad-2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\cos^2\theta-\frac{1}{r}z_r\\
&=f_{xx}+f_{yy}-\frac{1}{r}z_r
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{r}z_r$ を移項すれば求める式が出る。

例 10.2 (教科書 p.167, 問 17)
$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で、$\varphi(r)$ は r の C^2 級関数とする時、$f(x,y,z)=\varphi(r)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

を φ で表せ。

解

$$f_x=\varphi'(r)r_x,\quad f_y=\varphi'(r)\frac{y}{r},\quad f_z=\varphi'(r)\frac{z}{r}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
f_{xx}&=\varphi''(r)(r_x)^2+\varphi'(r)r_{xx}\\
f_{yy}&=\varphi''(r)(r_y)^2+\varphi'(r)r_{yy}\\
f_{zz}&=\varphi''(r)(r_z)^2+\varphi'(r)r_{zz}
\end{aligned}
$$

また、r の定義から $r^2=x^2+y^2+z^2$ なので、

$$
\begin{aligned}
rr_x&=x\quad r_x=\frac{x}{r},\quad r_{xx}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\\
rr_y&=y\quad r_y=\frac{y}{r},\quad r_{yy}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\\
rr_z&=z\quad r_z=\frac{z}{r},\quad r_{zz}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3},
\end{aligned}
$$

となり、これを上の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}&=\varphi''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+\varphi'(r)(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3})\\
&=\varphi''(r)+\frac{2}{r}\varphi'(r)
\end{aligned}
$$

練習 10.1 次の関係式で決まる w について w_t, w_s を求めよ。

(1)$w=x^2y;\quad x=st,\ y=s-t$ (2)$w=x^2-y\log x;\quad x=s/t,\ y=s^2t$
(3)$w=e^{x^2+y^2};\quad x=s\sin t,\ y=t\sin s$ (4)$w=\log(x+y)-\log(x-y);\quad x=te^s,\ y=e^{st}$