11 テイラーの定理

11.1 テイラーの定理

1 変数の時のテイラーの定理は、関数 $f(x)$ が $x=a$ の近くで C^n 級ならば 適当に $0<\theta<1$ を選んで

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

とできると言うものであった。この多変数版を考える。そのまえに、上の展開の一般項の形が覚えにくい場合の見付け方を紹介しよう。

形式的に

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \tag{1}$$

と書けたとする時、c_n はどう求めたらよいかと考えると、まず、上の式で $x=a$ を代入すると、右辺で $n\geq 1$ ならば $(a-a)^n=0$ であり、$0^0=1$ という約束により、右辺は c_0 となる。左辺は $f(a)$ だから、

$$c_0=f(a)$$

が分かる。a_1 を求めるために、(1) を微分すると

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

となり、これに $x=a$ を代入すると $1\cdot c_1=f'(a)$ つまり $a_1=f'(a)$ が分かる。同じように (1) を k 回微分した式で $x=a$ とすると、

$$f^{(k)}(a)=k!c_k \quad \text{つまり} \quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

と c_k を求める事ができる。

定理 11.1 (2 変数のテイラーの定理) 関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の領域 D で C^n 級とする。$(a,b)\in D$, $B((a,b);r)=\{(x,y)\in;(x-a)^2+(y-a)^2<r^2\}\subset D$ とするとき、$(a+h,b+k)\in B((a,b);r)$ ならば、$0<\theta<1$ を適当に選ぶ事により、

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\&+\frac{1}{2}\big(h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\big)+\ldots\\&+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a+\theta h,b+\theta k)h^n+\ldots\right.\\&+\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(a+\theta h,b+\theta k)h^ik^{n-i}+\ldots\\&\left.+\binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a+\theta h,b+\theta k)k^n\right)\end{aligned}$$

注意 11.1 上の式は長たらしいので、次のように略記する事が多い。

$$f(a+h,b+k)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(hD_x+k)D_y)^i}{i!}f(a,b)+\frac{(hD_x+kD_y)^n}{n!}f(a+\theta h,b+\theta k)$$

D_x は x による偏微分を表す。

証明のためには次の補題を用意しておくと良い。

補題 11.2 $f(x,y)$ が C^n 級で $x(t)=a+ht, y(t)=b+kt$ のとき、

$$F(t)=f(x(t),y(t))$$

に対して、

$$\frac{d^nF}{dt^n}(t)=(hD_x+kD_y)^nf(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}$$

証明 上の式右辺は普通の書き方をすると

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^ik^{n-i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(x(t),y(t))$$

となる。$n=1$ のときは合成関数の微分により、

$$\begin{aligned}\frac{dF}{st}(t)&=f_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+f_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\\&=(hD_xf)(x(t),y(t))+(kD_yf)(x(t),y(t))=(hD_x+kD_y)f(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}\end{aligned}$$

なので、補題は $n=1$ のとき正しい。n まで正しいとして

$$\frac{d^{n+1}F}{dt^{n+1}}=\frac{d}{dt}\frac{d^nF}{dt^n}=(hD_x+kD_y)\frac{d^nF}{dt^n}=(hD_x+kD_y)(hD_x+kD_y)^nf(x,y)\Big|_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}$$

により $n+1$ のときも正しい。 □

定理 11.1 の証明 上の補題の $F(t)$ で $F(1)$ を $t=0$ で n 次までテイラー展開すると

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=F(1)\\&=F(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}\frac{d^iF}{dt^i}(0)+\frac{1}{n!}\frac{d^nF}{dt^n}(\theta)\end{aligned}$$

となる。これに補題 11.2 を代入すれば良い。 □

11.2　2 変数関数の極値問題

関数 $f(x,y)$ が領域 D 内の点 (a,b) において極大値または極小値をとっているとする。このとき、$f(x,b)$ も $x=a$ において極値をとるので、$f_x(a,b)=0$ である。同じように $f_y(a,b)=0$ も成り立つ。したがって

(a,b) で $f(x,y)$ が極値を取る $\Longrightarrow f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

となるが、次の例が示すようにこれだけでは不十分である。

例 11.1 $f(x,y)=x^2-y^2$ では $(0,0)$ で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ だが、$x\neq 0$ のとき、$f(x,0)=x^2>f(0,0)=0$ であり、また $y\neq 0$ のとき、$f(0,y)=-y^2<f(0,0)=0$ だから、$(0,0)$ では f は極大でも極小でもない。*(*$(0,0)$ は鞍点*)*

テイラーの定理を使うと、f が C^2 級なら

$$
\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)\\
&=f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\
&+\frac{1}{2}\big(h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta)\big)
\end{aligned}
$$

で、f が (a,b) で極大値を取るとすると $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ で、k,h が小さければ $f(a+h,b+k)\leq f(a,b)$ となるので、

$$h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta)\leq 0$$

$h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{x,y}(a,b)+k^2(a,b)<0$ が任意の h,k に対して成り立っていれば、判別式により $f_{xx}(a,b)<0, f_{x,y}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)<0$ で、このとき、f が C^2 級だから f_{xx},f_{xy},f_{yy} は連続なので、(h,k) が十分小さければ

$$f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)<0,\ f_{x,y}(a\theta h,b\theta k)^2-f_{xx}(a\theta h,b\theta k)f_{yy}(a,b)<0$$

が成り立ち、

$$h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta)\leq 0$$

となる。極小値の時も同じように議論できる。したがって、

定理 11.3 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ とする。このとき、

(1) $f_{xx}(a,b)<0,\quad D(a,b)=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)<0$ ならば $f(a,b)$ は極大値

(2) $f_{xx}(a,b)>0,\quad D(a,b)=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)<0$ ならば $f(a,b)$ は極小値

判別式

$$D(a,b)=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

が正の時は h/k の値によって $h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)$ の符号は正にも負にもなるので、 (a,b) の近くでこの符号が定まらず、$f(a,b)$ は極大でも極小でもない。

$D(a,b)=0$ のときは もう少し先まで展開しないと極値かどうかを判定できない。

注意 11.2 f を閉集合 F 上で 考えた時は境界上の点で極値をとることがあるが、このときは上の条件は成り立っていない。上の条件はあくまでも 領域 D 内の点で極値を取るための条件である。

練習 11.1 (1) $f(x,y)=x^2-6x+y^2-8y+7$ の極値とそれを取る点を求めよ。

(2) $f(x,y)=x^2-6x+xy+y^2-3y+7$ の極値とそれを取る点を求めよ.

ヒント：　まず、$f_x=f_y=0$ を満たす点を探し、f_{xx},D を計算する。