12　極値問題（その２）

次回は模擬テスト

12.1　陰関数の定理

たとえば x と y が $x^2+y^2=1$ を満たすように変化すると、$y=\pm\sqrt{1-x^2}, x=\pm\sqrt{1-y^2}$ と、y は x の、x は y の関数となっている。（ただ一つの関数では表せていない。これに、x, y の値を （例えば $x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のように）与えると、その点の近くでは y は x の (x は y の) 関数として確定する。（例えば、上の例では $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ となっている。）一般に $F(x,y)=0$ を満たすように x, y が変化している時、同じように x は y の関数として、 y は x の関数として考える事ができる。しかし、その関数の形がちゃんと書けるかというと一般にはそこは分からない。分からないが、関数になっている事は分かる。このような状態を**陰関数**という。(面倒なので、普通は関数の形が書けるかどうかを区別しないで陰関数と呼ぶのが普通である。）

定理 12.1 $F(x,y)$ を点 (a,b) の近傍で定義された C^1 級関数とし、$F(a,b)=0$, $F_y(a,b)\neq 0$ を満たすとすると、$x=a$ の近傍 I とその上で定義された関数 $\phi(x)$ が $F(x,\phi(x))=0$ を満たすように見つけられる。この $\phi(x)$ は C^1 級で、 $\phi(a)=b$ をみたし、$x=a$ の近くでは唯一のものである。また、

$$\phi'(a)=-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$$

である。

定理の証明は省略する。最後の微分の式は、$y=\phi(x)$ と書けるならば、

$$F(x,\phi(x))=0$$

が $(x,y)=(a,b)$ の近くで成り立っており、これを x で微分すると

$$F_x(x,\phi(x))+F_y(x,\phi(x))\phi'(x)=0$$

$\phi(a)=b$ であることから、$F_x(a,b)+F_y(a,b)\phi'(a)=0$ なので、これから $\phi'(a)$ の式が得られる。

注意 12.1 条件 $F_y(a,b)\neq 0$ の条件が必要なわけは、例えば $x^2+y^2=1$ で考えると、 $F_y=2y$ なので、 $F_y=0$ ならば $y=0$ したがって $x=\pm 1$ となる。点 $(-1,0)$ や $(1,0)$ では $x^2+y^2=1$ を満たす関数は $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ のどちらかに決められない。したがって、上の主張の「唯一」というところが正しくなくなる。

12.2　条件つき極値問題：ラグランジュ(Lagrange) の乗数法

定理 12.2 $F(x,y), f(x,y)$ を C^1 級の関数として、x, y が $F(x,y)=0$ を満たしながら動く時、 (a,b) において $f(x,y)$ が極値を取るならば、$F_x(a,b)=0, F_y(a,b)=0$ となるか、ある実数 λ がとれて、

$$f_x(a,b)=\lambda F_x(a,b),\ f_y(a,b)=F_y(a,b) \quad i.e.(\mathrm{grad}f)(a,b)=\lambda(\mathrm{grad}F)(a,b)$$

が成り立つ。変数の数が多くなっても同様なことが成り立つ。

証明 $F_y(a,b)\neq 0$ と仮定して良い。このとき、陰関数の定理から $y=\phi(x)$ とかけ、$\phi(a)=b$ となる関数が唯一つ定まる。$\phi(x)$ は C^1 級。このとき、仮定から $f(x,\phi(x))$ は $x=a$ で極値を取るので、

$$f_x(a,\phi(a))+f_y(a,\phi(a))\phi'(a)=0 \quad i.e.\ f_x(a,b)-f_y(a,b)\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}=0$$

後半の式は $f_y(a,b)=\lambda F_y(a,b)$ とかくと、$f_x(a,b)=\lambda F_x(a,b)$ となり、定理が成り立っている。 □

例 12.1 $x^2+y^2=1$ を満たしながら変化する x, y に対して $f(x,y)=x+3y$ の最大値、最小値を求める。$x^2+y^2=1$ をみたす (x,y) の全体は $\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合（円周）なので、 $f(x,y)=x+3y$ はその上で連続なので、最大値と最小値を取る点がこの円周上にある。その点の候補を (a,b) とすると、$F(x,y)=x^2+y^2-1$ として $F(a,b)=0$ で、さらに 定理から $F_x(a,b)=F_y(a,b)=0$ またはある λ があって $f_x(a,b)=\lambda F_x(a,b), f_y(a,b)=\lambda F_y(a,b)$ が成り立つ。$F_x=2x, F_y=2y$ だから両方が 0 になるのは $(a,b)=(0,0)$ のときだが、$(0,0)$ は円周 $x^2+y^2=1$ の点でないので不適。したがって、$f_x=1, f_y=3$ だから、$1=\lambda 2a, 3=\lambda 2b$ が成り立つような λ がある。$a^2+b^2=1$ だから、このとき、

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}=1$$

これを解いて、$\lambda=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ したがって

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, b=\pm\frac{3}{\sqrt{10}} \quad （複号同順）$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}})=\sqrt{10}$$
$$f(\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}})=-\sqrt{10}$$

の二つのみが極値の候補なので、最大値、最小値がある事が分かっているので、f は $(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ で最大値 $\sqrt{10}$ をとり、$(-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ で最小値 $-\sqrt{10}$ をとる。

例 12.2 次の二つの閉集合の上の関数 $f(x,y)=x^2-6x+y^2-8y+7$ の最大値と最小値を取る点およびその値を求めてみよう。

$$A=\{-5\le x\le 5,-5\le y\le 5\},\quad B=\{x^2+y^2\le 25\}$$

A も B も有界な閉集合なので、その上で連続な $f(x,y)$ は、最大値および最小値を A および B の中でとる。A または B の内点（境界点でないところ）で極値を取るとすると、その点 (a,b) では $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ が成り立つ。$f_x=2x-6$, $f_y=2y-8$ だから、この点は $(3,4)$ で、 A の内点で、 B の境界点になっている。$f_{xx}=2$, $f_{xy}=0, f_{yy}=2$ なので、判別式 $D(3,4)=f_{xy}^2(3,4)-f_{xx}(3,4)f_{yy}(3,4)<0$ とあわせて、f は $(3,4)$ で A での極小値 -18 をとる。

A の境界上では $x=5,-5$ または $y=5,-5$ が成り立ち、$f(5,y)=25-30+y^2-8y+7=y^2-8y+2$ で、このとき、$-5\le y\le 5$ だから、この線分を (x,y) が動く時の最大と最小は $y=4$ で最小値 -14, $y=-5$ で最大値 67.

$f(-5,y)=25+30+y^2-8y+7=y^2-8y+62, -5\le y\le 5$ のときは $y=4$ で最小値 46, $y=-5$ で最大値 127.

$f(x,5)=x^2-6x+25-40+7=x^2-6x-8$, $-5\le x\le 5$ のときは $x=3$ で最小値 -17, $x=-5$ で最大値 47.

$f(x,-5)=x^2-6x+72$, $-5\le y\le 5$ のときは $x=3$ で最小値 63, $x=-5$ で最大値 127

以上をまとめて A での最小値は $(3,4)$ でとり、値は -18 で、最大値は $(-5,-5)$ でとり、その値は 127.

B の境界は $F(x,y)=x^2+y^2-25$ とおいて、$F(x,y)=0$ を満たす点。*Lagrange* の乗数法から、境界上の f の最大値を取る点は $F_x=2x, F_y=2y$ より、ある λ に対して $f_x=\lambda F_x, f_y=\lambda F_y$ をみたす。これより、

$$2x-6=2\lambda x, 2y-8=2\lambda y$$

となり、$x^2+y^2=25$ とあわせて、

$$(1-\lambda)^2=1$$

がわかる。これより、$\lambda=2,0$ 対応して、$(x,y)=(-3,-4),(3,4)$ である。

$f(3,4)=-18,\quad f(-3,-4)=82$ したがって、B の中での極値の候補は $f(-3,-4)=82, f(3,4)=-18$ の二つしかないので、$(-3,-4)$ で最大値 82, $(3,4)$ で最小値 -18 をとる。

練習 12.1 (1) $(0,0),(4,0),(0,1)$ の 3 点を頂点とする三角形内（境界も含む）を (x,y) が動く時、関数

$$f(x,y)=2x^2+y^2-4x-2y+5$$

の最大値、最小値とそれらを取る点を求めよ。

(2) 円板 $x^2+y^2\le 1$ のプレート上の温度分布は

$$T(x,y)=2x^2+y^2-y$$

によって与えられる事が分かっている。このとき、このプレート上で最も熱いスポット（点）ともっとも冷たいスポットの座標とその点の温度を求めよ。