2　1 変数の微分法 （その１）

定義 2.1 $x = a$ の近くで定義されている関数 $f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**とは、ある実数 A があって、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A$$

となる時に言う。この極限値 A を $f'(a)$ と書き、f の a における**微分係数**と呼ぶ。f がその定義域 D の各点で微分可能なとき、f は D で微分可能という。このとき、

$$f' : D \ni a \mapsto f'(a)$$

で D 上新しい関数が定義できるが、これを $f'(x)$ とかき、f の**導関数**と呼ぶ。

双曲線関数の微分

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

を双曲線関数という。これらの関数は三角関数と似た関係式を持っている。

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

など。

合成関数の微分

定理 2.1 f, g が微分可能の時、$h(x) = g(f(x))$ も微分可能で、

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

証明　$f(x+\delta) = f(x) + \varepsilon$ とかくと、$\delta \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{h(x+\delta)-h(x)}{\delta} &= \frac{h(x+\delta)-h(x)}{f(x+\delta)-f(x)}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \\ &= \frac{g(f(x)+\varepsilon)-g(f(x))}{\varepsilon}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\end{aligned}$$

なので、右辺は $\delta \to 0$ のとき

$$g'(f(x))f'(x)$$

に収束する。 □

2.1　逆関数とその微分

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で単調増加または単調減少とする。つまり、このとき、 $x \in [a, b]$ と $f(x)$ は 1 対 1 に対応している。したがって、f の値域 $R = f([a, b])$ の点 $y \in R$ を一つ与えると、唯一つ $f(x) = y$ となる x が決まる。この対応を f^{-1} とかき、f の **逆関数** と呼ぶ。

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

である。

逆関数の微分を考えよう。$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で単調増加または単調減少とする。逆関数を f^{-1} とかく。 $f^{-1}(x)$ は $[f(a), f(b)]$ 上で単調増加になっている。$f(x)$ が微分可能な時、h に対して $f(x+\delta) = f(x) + h$ になるように δ がとれる。このとき、

$$x + \delta = f^{-1}(f(x+\delta)) = f^{-1}(f(x) + h)$$

$h \to 0$ のとき、$\delta \to 0$ なので、$y = f(x)$ とかくと $f^{-1}(y) = x$ で、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{f(x+\delta)-f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

なので、

$$\frac{df^{-1}}{dx}(f(x)) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}, \qquad \frac{df^{-1}}{dx}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y))}$$

という式を得る。

2.2　媒介変数表示された関数の微分

$x = x(t)$, $y = y(t)$ という形で与えられた x と y は関数関係にある。いま、x, y が t について微分可能なとき、$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ という点に置いて $x'(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0) \neq 0$ ならば、y は $x = x_0$ で x について微分可能で、

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)}$$

が成り立つ。

証明 $x'(t_0) \neq 0$ なので、$x(t)$ は $t = t_0$ の近くで単調増加か単調減少。だから逆関数 $t = \varphi(x)$ がとれて $x(\varphi(x)) = x$, $\varphi(x(t)) = t$ が成り立っている。

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left.\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\varphi(x)}$$

このとき、$y = y(t) = y(\varphi(x))$ だから、

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \left.\frac{d}{dx}y(\varphi(x))\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{dt}(\varphi(x))\frac{d\varphi}{dx}(x)\right|_{x=x_0}$$

$x = x_0 \longleftrightarrow t = t_0$ だから、右辺は

$$\left.\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=t_0}$$

に等しい。 □

2.3 逆三角関数とその微分

$f(x) = \sin x$ は $[-\pi/2, \pi/2]$ において単調に増加するので、逆関数をもつ。これを

$$\sin^{-1} x$$

と書く。この関数の定義域は $[-1, 1]$ で、値域は $[-\pi/2, \pi/2]$ になる。逆関数の微分の公式から $y = \sin x$, $\sin^{-1} y = x$ とかいて

$$\frac{d \sin^{-1} y}{dy} = \frac{1}{\frac{d \sin x}{dx}} = \frac{1}{\cos x}$$

右辺は $y = \sin x$ を使って表すと、$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ なので、

$$\frac{d \sin^{-1} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ここで、y を x と書き直しておくと

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる。

$f(x) = \cos x$ は $[0, \pi]$ で単調減少。逆関数 $\cos^{-1} x$ をもつ。この関数の定義域は $[-1, 1]$ で、値域は $[0, \pi]$ になる。上と同じように考えると

$$\frac{d \cos^{-1} x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

がわかる。

$f(x) = \tan x$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ で単調増加で、逆関数 $\tan^{-1} x$ を持つ。この関数の定義域は $(-\infty, \infty)$ で、値域は $(-\pi/2, \pi/2)$ になる。

$$x = \tan(\tan^{-1} x))$$

を x で微分すると、

$$1 = \frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)} \frac{d \tan^{-1} x}{dx}$$

$y = \tan^{-1} x$ ならば $x = \tan y$ なので、

$$\cos^2(\tan^{-1} x) = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる。

練習 2.1 サイクロイド $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$ について、$x = a\pi$ のときの dy/dx を求めよ。(x は t について単調増加だから $x = a\pi$ は $t = \pi$ のときのみおこる。)

練習 2.2 次の関数を微分せよ。(導関数を求めよ)

(1) $\log(\cosh x)$	(2) $\sin^{-1}(3x+1)$	(3) $\cos^{-1}(x^2+x)$
(4) $e^{\tan x}$	(5) $\tan(\cos^{-1} x)$	(6) $x^3 \tan^{-1}(e^x)$