3　1 変数の微分法 （その２）

3.1　平均値の定理

定理 3.1 (ロル (**Rolle**) の定理)　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、開区間 (a,b) で微分可能とする。$f(a)=f(b)$ ならば、必ず $f'(c)=0$ となる c が $a<c<b$ を満たすようにある。

証明　$f(x)$ が $[a,b]$ で連続なので最大値および最小値を $[a,b]$ の中の点でとる。最大値か最小値のどちらかは $f(a)=f(b)$ と違うとして良い。（そうでなければ $f(x)$ は $f(x)=f(a)=f(b)$ を常に満たし定数関数。したがって区間内のどこででも微分は 0）いま、最小値が $f(c)$ とかけ $f(a)=f(b)$ と違うとすると、 $a<c<b$ である。$h>0$ のとき、$f(c)$ が最小なので、

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0, \qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\leq 0$$

ここで $h\to 0$ とすると、$f'(c)\geq 0$, $f'(c)\leq 0$ の両方が成り立ち、$f'(c)=0$.
□

定理 3.2 (平均値の定理)　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、開区間 (a,b) で微分可能とする。このとき、$a<c<b$ をみたす c で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となるものが必ずある。

証明

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

とおくと、これは $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能、かつ

$$g(a)=f(a), \quad g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$$

なので、ロルの定理が使えて、$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ となる $a<c<b$ がある。 □

3.2　コーシー (Cauchy) の平均値の定理

定理 3.3 (コーシー (**Cauchy**) の平均値の定理)　$f(x), g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で、開区間 (a,b) で微分可能とする。(a,b) 上のどこででも $g'(x)\neq 0$ ならば、ある $a<c<b$ がとれて

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

がなりたつ。

証明　平均値の定理より、$g(b)\neq g(a)$ である。

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

とおくと、この関数は閉区間 $[a,b]$ で連続で、開区間 (a,b) で微分可能である。また、

$$F(a)=f(a),\ F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a))=f(a)$$

なので、ロルの定理が使えて、$a<c<b$ となるある c で

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$$

が成り立つ。右側の式で $g'(c)\neq 0$ で割ったものを考えると求める式になる。
□

定理 3.4 (ロピタル (**de l'Hôpital**) の定理)
(1) $f(x), g(x)$ は $x=a$ を含むある閉区間で連続、$x=a$ を除いて微分可能で、$g'(x)\neq 0$ かつ $f(a)=g(a)=0$ とする。このとき、もしも

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

となるならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

が成り立つ。
(2)$f(x), g(x)$ は $x=a$ を除いて $x=a$ の近くで微分可能で、$g'(x)\neq 0$ かつ $x\to\infty$ のとき $g(x)\to\infty$ とする。このとき、

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

となるならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

が成り立つ。

証明 (1) $\alpha < a < \beta$ として、f, g は $[\alpha, \beta]$ で連続かつ $x = a$ を除いてここで微分可能として良い。閉区間 $[\alpha, a]$ でコーシーの平均値の定理が使えて、$\alpha < x < a$ のとき、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が $x < c < a$ を満たすようにとれる。$x \to a$ ならば $c \to a$ なので、仮定から右辺は A に近づく。したがって

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

(ここでは $x < a$ で議論したが、$x > a$ のときも同じように議論すれば良い。)

(2) $a < x < y$ として、コーシーの平均値の定理から

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $x < c < y$ がある。これから

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} == \frac{f'(c)}{g'(c)}(\frac{g(y)}{g(x)} - 1)$$

y をとめて $x \to a$ とすると、c も動くが $a < c < y$ の範囲である。このとき、

$$\lim_{x \to a}(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} bigr) = 0$$

ところでもともと y が a に近いなら $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は A に近いので、上の式は

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$$

を意味している。 □

例 3.1 (1) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$ を計算する。

分母分子とも $x = 0$ の近くで微分可能で $x = 0$ で 0 になるので、$x \neq 0$ で $\sin x \neq 0$ より、ロピタルの定理から

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x + \sin x}{\cos x} = 1$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos^{-1}(1 - x)}{\sqrt{x}}$ を計算する。分母、分子とも $x = 0$ の近くで微分可能でともに $x \to 0$ のとき 0 に近づく。$\sqrt{x} \neq 0$ の範囲でロピタルの定理から

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos^{-1}(1 - x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{2}$$

注意 $\cos^{-1}(1 - x)$ の微分は $\cos^{-1} y$ という関数に $y = 1 - x$ をいれた合成関数の微分だから、

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}(1 - x) = \frac{d}{dy} \cos^{-1} y \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} -1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}$$

となる。

練習 3.1 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\log(1 + x)}$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} 3x}{\sin^{-1} x}$ (5) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\log x^2}{x^2 - 1}$