4　1 変数の微分法 （その３）

4.1　高階の導関数

開区間 (a,b) で定義された関数 $f(x)$ が (a,b) で微分可能の時、導関数 $f'(x)$ を考える事ができる。この導関数 $f'(x)$ がさらに区間 (a,b) で微分可能の時、その導関数 $f''(x)$ (または $f^{(2)}(x)$ と書く) を考える事ができる。$f''(x)$ を $f(x)$ の **2 階導関数**と呼ぶ。帰納的に $f(x)$ の **n-1 階導関数** $f^{(n-1)}(x)$ が (a,b) で微分可能ならば、これを微分する事により (a,b) 上で $f(x)$ の **n 階導関数** $f^{(n)}(x)$ が定義できる。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

とも書く。

例 4.1 (教科書 p.42 問 10) $f(x) = \log(1+x)$ のとき $f^{(n)}(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ &\vdots \quad \vdots \\ f^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

ライプニッツ (Leibnitz) の公式

定理 4.1 $f(x), g(x)$ が開区間 (a,b) で n 回微分可能とする時次の公式が成り立つ。

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

証明　数学的帰納法により証明する。$n=1$ のとき上の式は

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

となり、これは積の微分公式そのものなので正しい。n まで正しいとすると、

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

となるが、この両辺を x で微分すると、

$$\text{左辺} = (f(x)g(x))^{(n+1)},$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \end{aligned}$$

ただし、$\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ と約束する。このとき、

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

だから、

$$\text{右辺} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)$$

となり、公式は $n+1$ でも正しい。 □

例 4.2 $f(x) = \log(1+x)$ についてみると、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{つまり} \quad (1+x)f'(x) = 1$$

この右側の式を n 回微分すると $n \geq 1$ のとき、

$$(1+x)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) = 0 \quad \text{つまり} \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{-n}{1+x} f^{(n)}(x)$$

この漸化式を $f'(x) = f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$ として解く事ができて

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例 4.3 (教科書 p.43 例 7) $f(x) = \sin^{-1}(x)$ のとき $f^{(n)}(0)$ を求める。$f(0) = 0$ である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{xf'(x)}{1-x^2} \end{aligned}$$

分母を払って

$$(1-x^2)f^{(2)}(x) = xf'(x)$$

これより、$f^{(2)}(0) = 0$ また、両辺を $n-2$ 回微分してライプニッツの公式から

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - 2x(n-2)f^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-2)f^{(n-2)}(x)$$

$x=0$ を代入して

$$f^{(n)}(0) - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(0) = (n-2)f^{(n-2)}(0)$$

整理して

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$$

これより、

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdots 3^2 \cdot 1 f'(0) = (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdots 3^2 \cdot 1$$
$$f^{(2n)}(0) = (2n-2)^2 \cdot (2n-4)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 f^{(2)}(0) = 0$$

が分かる。

練習 4.1 次の微分を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1)\sin^{-1}x & (2)\tan^{-1}x & (3)\cos^{-1}x \\ (4)\sinh x & (5)\log(1+e^x) & \end{array}$$

練習 4.2 (1) $f(x) = \tanh x$ は $f'(x) = 1 - f^2(x)$ を満たすことを示せ。また、このことを使って（ライプニッツの公式を利用して）

(2) $f(0), f'(0), f^{(2)}(0), f^{(3)}(0)$ を求めよ。

(3)$f^{(2n)}(0)$ を求めよ。