5　1 変数の微分法 （その４）

5.1　テイラー (Taylor) の定理

テイラーの定理は、応用上も理論上も非常に重要な定理。使い勝手がとてもよい。

定理 5.1 $f(x)$ が $x = a$ の近くで n 回微分可能で、n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続ならば x と a の間にある $c(a < c < x$ または $x < c < a)$ がとれて、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つ。

証明 $n = 1$ のときは平均値の定理から上の主張は正しい。$n \geq 2$ として示せば良い。x をとめて、t の関数

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \frac{(x-t)^n}{(x-a)^n}$$

を考える。$t = a, x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} g(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = f(x) \\ g(x) &= f(x) \end{aligned}$$

$g(t)$ は (a, x) (または (x, a)) で微分可能だからロルの定理が使えて、$g'(c) = 0$ となる c が $a < c < x$ となるように (または $x < c < a$ となるように) とれる。$g'(c)$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} g'(c) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - k\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{k-1}\right] \\ &+ \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \frac{-n(x-c)^{n-1}}{(x-a)^n} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \\ &- \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \frac{n(x-c)^{n-1}}{(x-a)^n} \end{aligned}$$

これが 0 なのだから、

$$\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} = \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \frac{n(x-c)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

となり、両辺を $n\frac{(x-c)^{n-1}}{(x-a)^n} \neq 0$ でわると、

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

移項すると求める式が得られる。 □

定理の式は関数 $f(x)$ を n 次までテイラー展開した式と呼ぶ。

5.2　関数のテイラー展開

定理の式で

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

を剰余項とよび、$R_n(x)$ とかく事がある。ある区間 (a, b) で $f(x)$ が何回でも微分ができ、

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

が常に成り立っている時、 定理の式で $n \to \infty$ として、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

という式が成り立つ。これを $f(x)$ を $x = a$ で**テイラー展開**した式といい、右辺の級数を $f(x)$ の $x = a$ における**テイラー級数**と呼ぶ。

例 5.1　$f(x) = e^x$ を $x = 0$ でテイラー展開する事を考える。$f(x) = e^x$ は x について何回でも微分できて、$f^{(n)}(x) = e^x$ であるから、$0 < c < x$ (または $x < c < 0$) を適当に取れば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^c\frac{x^n}{n!}$$

ところが $e^c \leq e^{|x|}$ で、また、 任意の x に対して

$$\lim_{n\to\infty} x^n n! = 0$$

だから、剰余項は $n \to \infty$ のとき 0 に収束している。したがって、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

というテイラー展開が得られる。

注意 5.1 $x = 0$ でのテイラー展開を特にマクローリン展開とも言う。

例 5.2 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ を n 次まで $x=0$ でテイラー展開しよう。

$$(1-x)f(x) = 1$$

だからこれを n 回微分するとライプニッツの公式により

$$(1-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0$$

これを解いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{n}{(1-x)}f^{(n-1)}(x) = \ldots = \frac{n!}{(1-x)^n}$$

だから適当な $0 < c < x$ (または $x < c < 0$) に対して

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{(n+1)!}{(n+1)!(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{(1-c)^{n+1}}$$

剰余項が $n \to \infty$ のときに 0 に収束するとすると

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^n$$

が成り立つが、これは $x \geq 1$ のときは右辺が発散して等式は成り立たない。したがって、剰余項は $x > 1$ では 0 に収束しない。(テイラー展開できない)このような例もたくさんある。テイラー展開ができる関数は良い関数であると言える。

例 5.3 $f(x) = \cos x$ を $x = 0$ でテイラー展開(マクローリン展開)しよう。
$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x = -f(x)$ だから

$$f^{(k)}(x) = (f''(x))^{(k-2)} = (-f(x))^{(k-2)}$$

と計算する事により、

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n f'(0) = 0$$

となるので、形式的には

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} + \ldots$$

となる。テイラーの定理で n 次まで展開した時の剰余項は

$$\frac{x^n}{n!}\cos(c + \frac{n\pi}{2})$$

とかけるので、 $|\cos x| \leq 1$ だからこの剰余項は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。従って上の形式的な展開は正しい。

練習 5.1 (1) $\sin x$ を $x = 0$ でテイラー展開(マクローリン展開)せよ。

(2) $\sinh x$ を $x = 0$ でテイラー展開(マクローリン展開)せよ。

(3) $(1+x^2)^{1/3}$ を $x = 0$ でテイラー展開(マクローリン展開)せよ。(これは形式的な計算だけでいい)