6 2 変数関数とそのグラフ

いよいよこれから変数がたくさんある関数について考えて行く。といっても、この様な関数は我々の身の回りに溢れている。例を挙げてみよう。

- 底面の底辺 a, 底面の三角形の高さ b, 高さ h の三角錐の体積 V は

$$V = \frac{1}{6}abh$$

  となり、 a, b, h の変数を持つ関数 $V = V(a, b, h)$

- 国語 J 点、英語 E 点、数学 M 点、理科 NS 点、社会 SS 点の時の総合点 T 点は

$$T = J + E + M + NS + SS$$

  となり、 J, E, M, NS, SS の変数を持つ関数 $T = T(JE, M, NS, SS)$

- 30 人の学生の身長を $X_1, X_2, \ldots X_{30}$ と書く時、この平均 M と 標準偏差 σ は、

$$M = \frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30} X_k = \frac{1}{30}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{30})$$

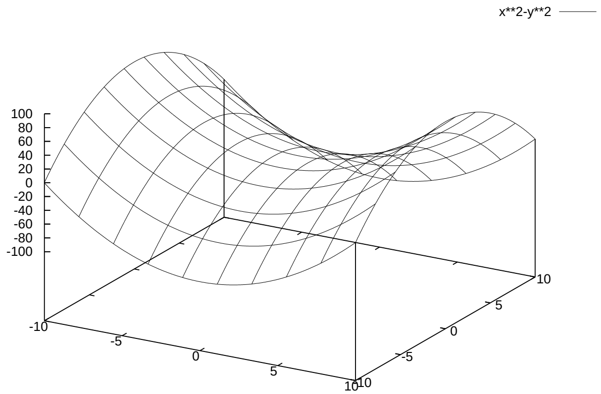
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30}(X_k - M)^2}$$

など、本当にいろいろある。したがって普段我々は多変数の関数を見ている事の方が多い。ただ、調べる時は一つの変数に注目して他を定数扱いにするということを無意識にやっている。これが偏微分の考え方でもある。

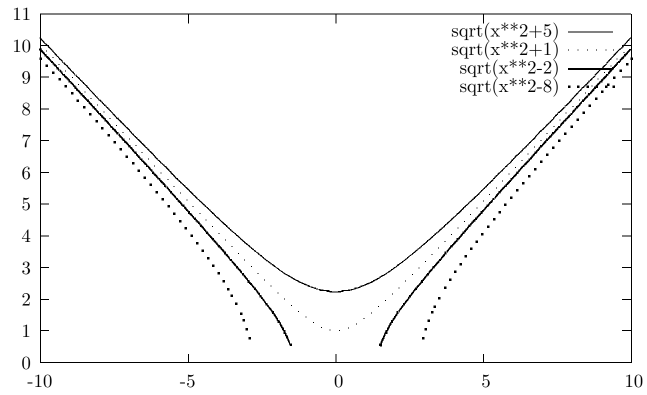
この考え方を学ぶため、まず、多変数の関数の中でも一番考えやすい（だろう）2 変数の関数について考えてみる。

関数 $f(x, y)$ のグラフを描く事を考えてみる。1 変数の関数のグラフを書くには, 変数を表す x 軸と 関数の値を表す y 軸が必要だった。したがって、2 変数の関数をグラフに表すには変数を表す x 軸および y 軸と、関数の値を表す z 軸が必要で、グラフは 3 次元空間の中の 曲面になる。いくつか例を見てみよう。

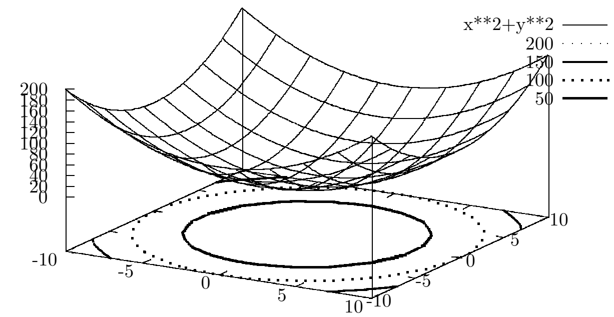
最初の例は、曲面 $z = x^2 - y^2$ である。どのような曲面になるかコンピュータに書かせたら次のようになった。どのようにグラフを描いたら良いかもなかなか難しい。



方程式から曲面の形を想像する一つの方法は等高線を描く事である。例えば上の例では、z の値を高さと見て、このグラフの曲面を高さ h で切り取った時に出てくる曲線を、高さ h の等高線と呼ぶ事にしよう。例えば、この曲面では 高さ $-5, -1, 2, 8$ の等高線は下の図のようになる。

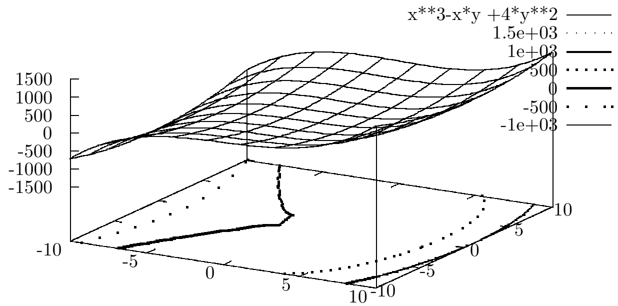


次の例は曲面 $z = x^2 + y^2$ のグラフである。



等高線が原点を中心とした同心円になっている事が分かる。

適当に関数を作ってグラフを見てみる。次の図は $z = x^3 - xy + 4y^2$ のグラフである。目盛の取り方もなかなか手でやるのは大変である。とにかく、想像しにくいのが 2 変数関数のグラフである。



練習 6.1 $z = x^2 + xy$ のグラフについて、

(1) $y = 2$ の時の切口のグラフを x-z 平面に描け

(2) $x = 2$ の時の切口のグラフを y-z 平面に描け

(3) $z = 2$ のときの等高線を x-y 平面に描け

(4) $z = x^2 + xy$ のグラフを描いてみよ。