7　2 変数関数の極限、偏導関数

7.1　2 変数の連続関数

平面を $\mathbb{R}^2$ と書き、平面上の点を $\boldsymbol{x}=(x,y)$ と書く事にする。まず、平面上の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}=\{(x_n,y_n)\}$ が平面上のある点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ に近づくとは、

$$|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}\to 0$$

となることをいう。$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が $\boldsymbol{a}$ に近づく近づき方はいろいろある。

定義 7.1 点 $\boldsymbol{a}$ の近くで定義された関数 $f=f(x,y)$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で連続であるとは、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ にどのような近づき方をしても

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x,y)=f(\boldsymbol{a})=f(a,b)$$

が成り立つ時にいう。

連続な関数は多いが、一見連続なようで連続にならない関数も多い。次の例は連続にならない有名な例である。

例 7.1

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき },\\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき}\end{cases}$$

明らかに x 軸上または y 軸上では $f(x,0)=f(0,y)=0$ が定義から分かる。だからこの関数は原点で連続なように見えるが、$y=kx$ に沿って $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}=(0,0)$ とすると、

$$f(x,kx)=\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0$$

だから、近づき方によって、 $f(x,y)$ は異なる値に近づいている。

注意 7.1

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき },\\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき}\end{cases}$$

とすると、 $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続になる。これは

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\leq xy\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

であることから、三つの辺を $\sqrt{x^2+y^2}>0$ でわると、

$$-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\leq\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

右辺も左辺も $(x,y)\to(0,0)$ のとき、0 に収束する。

7.2　平面内の開集合と閉集合

いろいろな定義の仕方があるが、ここでは最初に開集合を定義する。（教科書の定義の仕方とは違うが、同値な定義である事が知られている。）

開円板　$B(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x};\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<r\}$ を中心 $\boldsymbol{a}$ 半径 $r>0$ の**開円板**と呼ぶ。

定義 7.2 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 G が **開集合**であるとは、任意の G の点 $\boldsymbol{a}\in G$ に対して、適当に $r>0$ をとれば $B(\boldsymbol{a},r)\subset G$ となる時にいう。

定義 7.3 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 F が **閉集合**であるとはその補集合 F^c が開集合になっている事をいう。ただし、

$$F^c:=\{x\in\mathbb{R}^2\,;\,x\notin F\}$$

定義 7.4 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**連結** (正しくは弧状連結) であるとは、D 内の任意の 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して D 内で $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ をつなぐ曲線が引ける時にいう。

定義 7.5 平面 $\mathbb{R}^2$ の連結な開集合を**領域**と呼ぶ

定義 7.6 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界** であるとは、ある $R>0$ がとれて $D\subset B(\boldsymbol{0},R)$ となる時にいう。

以後、関数は領域上定義されているか、有界な閉集合上で定義されているものとする。

7.3　連続関数の性質

多変数の連続関数も 1 変数の連続関数と同じ様な性質がある。ここに列挙しておく。D の各点で連続な関数を D で連続と呼ぶ。

- f,g が 領域 D で連続な時、$f\pm g, cf, fg, f/g$ は連続である。ただし、f/g については $g(\boldsymbol{a})\neq 0$ となる点 $\boldsymbol{a}$ でのみ考える。
- E 上定義された連続関数 h と D 上定義された連続関数 f,g があり、任意の $\boldsymbol{x}\in D$ に対して $(f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))\in E$ ならば、$F(\boldsymbol{x})=h(f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})))$ は D で連続な関数となる。
- 有界な閉集合 F 上連続な関数は F での最大値と最小値を取る点を F 内に持つ。
- （中間値の定理）領域 D 上連続な関数は任意の 2 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$ に対して $f(\boldsymbol{a})$ と $f(\boldsymbol{b})$ の間にある値すべてを D 内で取る。

7.4　偏微分

関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ で微分するとはどういうことか想像しにくい。形式的に書いてみると

$$f'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{h}}$$

と、ベクトルで割算するというむちゃくちゃなことになる。

仕方がないので、まずは一つの変数 x に注目する。y は定数として扱う。そうすると微分が考えられる。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

とかき、これを $\boldsymbol{x} = (x,y)$ における x **に関する** f **の偏微分係数**と呼ぶ。とにかく一つの変数に着目し、他の変数は定数と思って微分すれば良い。

例 7.2 $f(x,y) = x^2 + y^2$ を点 (a,b) において x,y についてそれぞれ偏微分をすると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{d}{dx}(x^2+b^2)\bigg|_{x=a} = 2x\bigg|_{x=a} = 2a$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{d}{dy}(a^2+y^2)\bigg|_{y=b} = 2y\bigg|_{y=b} = 2b$$

例 7.3 (教科書 p.162 例 3) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ を偏微分せよ。
解　$(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$ のときの偏微分係数を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \frac{d}{dx}x\sqrt{x^2+b^2}\bigg|_{x=a} = \Big(\sqrt{x^2+b^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+b^2}}\Big)\bigg|_{x=a} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \frac{d}{dy}a\sqrt{a^2+y^2}\bigg|_{y=b} = \frac{ay}{\sqrt{a^2+y^2}}\bigg|_{y=b} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

最後に $a = x, b = y$ と書き直して

$$\frac{\partial x\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial x\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$(x,y) = (0,0)$ の時の偏微分は定義に戻って

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h} = 0$$

となる。

慣れてくるといちいち $x = a, y = b$ と書かなくても 「x を止めて y で微分」、「y を止めて x で微分」という計算ができるようになる。

練習 7.1 次の関数を x,y でそれぞれ偏微分せよ。 ただし、$(x,y) \neq (0,0)$ とする。

(1) xy^2　(2) $e^x \sin y$　(3) e^{-xy}
(4) $\sqrt{x^2-y^2}$　(5) $(3x^2+y^2)^{-1/3}$　(6) $\tan^{-1}(y^2/x)$　$(x \neq 0)$