8 高階の偏導関数

1 変数の関数の時と同じ様に高階の偏導関数を考える事ができる。2 変数だと、2 次の導関数が 4 種類考えられる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad x \text{ で 2 回偏微分}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad y \text{ で偏微分してから } x \text{ で偏微分}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad x \text{ で偏微分してから } y \text{ で偏微分}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad y \text{ で 2 回偏微分}$$

これらは一般には違う関数である。$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ などをたくさん使うとスペースを取るので $\frac{\partial f}{\partial x}$ を簡単に f_x と書く方法もある。これだと $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx}$ と書く事になる。

ただ、 n 階の偏導関数を表すのは $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ の様に書く方が $f_{x_n \cdots x_1}$ と書くより分かりやすいかも知れない。

C^n-級の関数 1 変数の時と同じように、C^n 級関数を、次のように定義する。

定義 8.1 関数 $f(x,y)$ が n 次までのすべての偏導関数を持ち、かつ、これらの偏導関数がすべて連続の時、 f は C^n **級の関数**であるという。

微分の順序交換 偏微分の順序がいつ交換できるかについては次の定理が良く知られている。

定理 8.1 領域 D で C^2 級の関数 $f(x,y)$ については

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

が成立する。

証明 $(a,b) \in D$ を任意にとってきて $f_{x,y}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ をいう。

$$g(x,y) = f(x,y) - f(x,b)$$

に対して平均値の定理を使うと、$b+k$ を定数と見て

$$g(a+h,b+k) - g(a,b+k) = hg_x(a+\theta h, b+k) = h(f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b))$$

となり、再び平均値の定理により、

$$f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b) = kf_{xy}(a+\theta h, b+\delta k)$$

とかけ、$0 < \theta, \delta < 1$ である。したがって

$$g(a+h,b+k) - g(a,b+k) = khf_{xy}(a+\theta h, b+\delta k)$$

いま、左辺は

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

と書けるので、$G(x,y) = f(x,y) - f(a,y)$ をつかって、同じ事をすると

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \\
&= G(a+h,b+k) - G(a+h,b) = kG_y(a+h, b+\delta' k) \\
&= k(f_y(a+h,b+\delta' k) - f_y(a,\delta' k)) = khf_{y,x}(a+\theta' h, b+\delta' k)
\end{aligned}$$

結局まとめると

$$f_{xy}(a+\theta h, b+\delta k) = f_{yx}(a+\theta' h, b+\delta' k)$$

という式を得る。 $(0 < \theta, \theta', \delta, \delta' < 1)$ ここで、$k, h \to 0$ とすると、連続性から

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

が出る。

注意 8.1 教科書 p.163 のシュワルツの定理はこれより弱い条件で強い結果をだしている。その分証明がアイデアがいる。

系 8.2 関数 $f(x,y)$ が、領域 D で C^n 級の時、n 階までの偏微分は偏微分の順番をどのように入れ換えても同じ値になる。例えば、f が D で C^3 級ならば、

$$f_{xxy}(x,y) = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)$$

が成り立つ。

解 帰納法で証明すればいい。n 階までの微分で上の事が正しいとして、f が C^{n+1} 級のとき $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ をそれぞれ x か y のどちらかを取るものとする。$1 \le i < j \le n+1$ を任意に取り、上の列の i 番目と j 番目を入れ換えた列を $y_1, \ldots, y_{n+1}$ と書く。

$$k \ne j, k \text{ ならば } y_k = x_k, \quad x_j = y_i, x_i = y_j$$

となっている。 $x_i \ne x_j$ としておいて良い。このとき $f_{x_1,\ldots,x_{n+1}} = f_{y_1,\ldots,y_{n+1}}$ を示せば良い。

$j \ne n+1$ ならば $x_{n+1} = y_{n+1}$ で、帰納法の仮定から $f_{x_1,\ldots,x_n} = f_{y_1,\ldots,y_n}$ となり、これを $x_{n+1} = y_{n+1}$ で偏微分して

$$f_{x_1,\ldots,x_{n+1}} = f_{y_1,\ldots,y_{n+1}}$$

となるので、$j=n+1$ と仮定して良い。

このとき $x_n \neq y_n$ ならば $i=n$ で、したがって x_k 達と y_k 達の取り方から $k \leq n-1$ ならば $x_k = y_k$ となり、$f_{x_1,\dots,x_{n-1}} = f_{y_1,\dots,y_{n-1}}$ この関数は C^2 級ではあるので、定理より

$$f_{x_1,\dots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}} = f_{x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1},x_n} = f_{y_1,\dots,y_{n+1}}$$

が分かる。

$x_n = y_n$ のときは $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ だから $x_n = x_{n+1}$ または $y_n = y_{n+1}$ のどちらかが成り立つ。$x_n = x_{n+1}$ として話をすすめても構わない。このときは

$$z_k = y_k, 1 \leq k \leq n-1,\ z_n = y_{n+1}, z_{n+1} = y_n$$

とおくと、定理より

$$f_{z_1,\dots,z_{n+1}} = (f_{y_1,\dots,y_{n-1}})_{y_{n+1},y_n} = f_{y_1,\dots,y_{n+1}}$$

となるが、$z_{n+1} = y_n = x_n = x_{n+1}$ となるので、$j \neq n+1$ の場合が使えて

$$f_{z_1,\dots,z_{n+1}} = f_{x_1,\dots,x_{n+1}}$$

これで証明できた。 □

例 8.1 f が C^3 級の時は次のように定理を使ってすべての 3 階の偏微分が等しい事が言える。

$$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}$$

例 8.2 (教科書 p.164 問 14) $f(x,y) = e^{ax}\cos(by)$ のとき $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ を求めよ。

解 e^{ax} は x に関して何回でも微分可能で、$\cos(by)$ も y に関して何回でも微分可能だから結果として $f(x,y) = e^{ax}\cos(by)$ は 任意の自然数 $n, m \geq 0$ に対して C^{n+m} 級で、上の定理から、微分の順番は交換可能だから

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^m e^{ax}}{\partial x^m}\frac{\partial^n \cos(by)}{\partial y^n} = a^m b^n e^{ax}\cos(by + \frac{n\pi}{2})$$

と計算すれば良い。最後のところは

$$\begin{cases} a^m(-1)^k b^{2k-1}\sin(by) & n = 2k-1 \ \text{のとき} \\ a^m(-1)^k b^{2k}\cos(by) & n = 2k \ \text{のとき} \end{cases}$$

と書いても良い。

練習 8.1 次の関数について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を確認せよ。

(1) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$ (2) $f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$

練習 8.2 ラプラシアン作用素 Δ を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で定義する。このとき、次の関数について Δf を計算せよ。

(1) $f(x,y) = x^3y - y^3x$ (2) $f(x,y) = \log(4x^2 + 4y^2)$

(3)$f(x,y) = 3x^4y^5 - 2x^2y^3$