9 全微分, 合成関数の微分, 接平面

9.1 全微分可能性

1 変数の関数の時は 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば h が小さい時

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+o(h)$$

と書けた。 ($o(h)$ は h でわって 0 に近づくという意味) $x=a$ の近くで $f(x)$ が 1 次関数で近似できるという事を言っている式である。2 変数関数の時に、同じような事がいえるとすれば、どうなるだろうか？

定義 9.1 関数 $f(x,y)$ が $x=a, y=b$ において **全微分可能** であるとは、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k=\varepsilon(a,b;h,k)$$

とかくとき、

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{\varepsilon(a,b;h,k)}{\sqrt{h^2+y^2}}=0$$

となることをいう。

関数 $f(x,y)$ がいつ全微分可能になるかについては次の定理がある。

定理 9.1 関数 f が $x=a, y=b$ の近くで f_x, f_y をもち、かつそのいずれかが (a,b) で連続ならば f は (a,b) で全微分可能。したがって特に f が C^1 級ならば全微分可能。

証明 f が (a,b) の近くで x, y について偏微分可能で、f_x が (a,b) で連続とする。このとき、平均値の定理と $f_y(a,b)$ があることから

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k)-f(a,b) &= f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b) \\ &= hf_x(a+\theta h,b+k)+k(f_y(a,b)+\varepsilon_1) \end{aligned}$$

とかける。ただし、$0<\theta<1, \lim_{k\to 0}\varepsilon_1=0$ である。 f_x が (a,b) で連続な事により、

$$f_x(a+\theta h,b+k)=f_x(a,b)+\varepsilon_2$$

とかくと、

$$\lim_{h,k\to 0}\varepsilon_2=0$$

したがって、

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+h\varepsilon_2+k\varepsilon_1$$

とかけ、$h,k\to 0$ のとき、

$$\frac{|h\varepsilon_2+k\varepsilon_1|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le|\varepsilon_2|+|\varepsilon_1|\to 0$$

となるので、 f は (a,b) で全微分可能。 □

$f(x,y)$ が全微分可能な時、形式的な記号 $df=f_xdx+f_ydy$ を f の**全微分**と呼ぶ。

方向微分 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ が単位ベクトル $(v_1^2+v_2^2=1)$ のとき、2 変数関数 $f(x,y)$ を (a,b) において、$\boldsymbol{v}$ 方向に微分する。つまり、

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+v_1t,b+v_2t)-f(a,b)}{t}$$

が存在する時に、点 (a,b) における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**が存在すると言う。

定理 9.2 f が (a,b) で全微分可能ならば、任意の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分が存在する。その値は

$$\left.\frac{df(a+tv_1,b+tv_2)}{dt}\right|_{t=0}=v_1f_x(a,b)+v_2f_y(a,b)$$

となる。

証明 f が (a,b) で全微分可能な事から

$$f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)=tv_1f_x(a,b)+tv_2f_y(a,b)+\varepsilon$$

とかくと、$t\to 0$ のとき、$tv_1\to 0, tv_2\to 0$ で、

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}\to 0$$

左辺は $\varepsilon/|t|$ と書けるので、

$$\begin{aligned} \frac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)}{t} &= v_1f_x(a,b)+v_2f_y(a,b)+\frac{\varepsilon}{t} \\ &\to v_1f_x(a,b)+v_2f_y(a,b) \end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{v}$-方向の方向微分が存在している。 □

9.2 合成関数の微分

定理 9.3 f は $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で全微分可能とする。$x(t), y(t), t\in[a,b]$ が微分可能で、 $(x(t),y(t))\in D$ が $t\in[a,b]$ で成り立つならば、$h(t)=f(x(t),y(t))$ は $t\in[a,b]$ で微分可能で

$$h'(t)=f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)$$

が成り立つ。変数の数が多くなっても同じである。

証明

$$\begin{aligned} & f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t)) \\ &= f_x(x(t),y(t))(x(t+h)-x(t))+f_y(x(t)y(t))(y(t+h)-y(t))+\varepsilon \end{aligned}$$

とかくと、全微分可能性より、$h \to 0$ のとき、

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{(x(t+h)-x(t))^2+(y(t+h)-y(t))^2}} \to 0$$

なので、このとき、

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{h} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x(t+h)-x(t))^2+(y(t+h)-y(t))^2}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{(x(t+h)-x(t))^2+(y(t+h)-y(t))^2}}{h} \\ &\to 0 \cdot \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\end{aligned}$$

□

接平面

$(x(t), y(t), z(t))$ が曲面 $F(x,y,z)=0$ 上を動いている時、F が C^1 級の関数で、$x(t), y(t), z(t)$ が t について微分可能ならば上の定理により、

$$F_x(x(t),y(t),z(t))x'(t)+F_y(x(t),y(t),z(t))y'(t)+F_z(x(t),y(t),z(t))z'(t)=0$$

が成り立つ。いま $F(a,b,c)=0$ をみたすこの曲面上の点 (a,b,c) を通るこの曲面上の曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ において、$(a,b,c)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ とすると、

$$F_x(a,b,c)x'(t_0)+F_y(a,b,c)y'(t_0)+F_z(a,b,c)z'(t_0)=0$$

なので、この点における接ベクトル $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ は必ずベクトル $\boldsymbol{n}=(F_x(a,b,c),F_y(a,b,c),F_z(a,b,c))$ と直交することになる。この $\boldsymbol{n}$ を (a,b,c) における曲面 $F(x,y,z)=0$ の**法線ベクトル**と呼ぶ。(a,b,c) を通り、この法線ベクトルに直交する平面は

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

となるが、この平面をこの曲面の (a,b,c) における接平面と呼ぶ。この曲面上の曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ が $t=t_0$ で (a,b,c) を通る時、接ベクトル $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ に対して $(a+x'(t_0), b+y'(t_0), c+z'(t_0))$ はこの接平面上の点になる。

なお、$f(x,y)$ に対して $(f_x(x,y), f_y(x,y))$ を $\mathrm{grad} f$ とかく。変数の数が多くなっても、同じようにすべての偏微分係数を並べたベクトルを $\mathrm{grad} f(x,y,z)$ とかく。上の $\boldsymbol{n}$ は $\mathrm{grad} F(a,b,c)$ ともかける。

例 9.1 (教科書 p.175, 問 26) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は

$$z-c=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

となる。なぜなら、$F(x,y,z)=z-f(x,y)$ とおくと、この曲面の方程式は $F(x,y,z)=0$ と書き直せるので、接平面の方程式は上の事から

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

となるが、

$$F_x(x,y,z)=-f_x(x,y), \quad F_y(x,y,z)=-f_y(x,y,z), \quad F_z(x,y,z)=1$$

なので、これを代入すると求める式を得る。

例 9.2 1) $z=x^2+xy$ の点 $(1,1,2)$ における接平面の方程式は $f(x,y)=x^2+xy$ とすると $f_x=2x+y, f_y=x$ だから、

$$z-2=3(x-1)+(y-1)$$

となる。

2) $x^2+2y^2+4z^2=7$ の点 $(1,1,1)$ における接平面の方程式は $F(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2-7$ とおくと、$F_x=2x, F_y=4y, F_z=8z$ なので、点 $(1,1,1)$ における接平面の方程式は

$$2(x-1)+4(y-1)+8(z-1)=0$$

となる。

練習 9.1 次の関数で定義される曲面上の指定された点における接平面の方程式を求めよ

(1) $z=xe^y+xy$; $(2,0,2)$ (2) $x^2-y^2+z^2+1=0$; $(1,3,\sqrt{7})$

練習 9.2 次の関数の指定された点 P における指定された方向 $\boldsymbol{v}$ に関する方向微分を求めよ。(注意 $\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルとは限らないのでまず、その方向の単位ベクトルを求める必要がある。)

(1) $f(x,y)=x^2y$, $P=(1,2), \boldsymbol{v}=(3,-4)$

(2) $f(x,y)=e^x\sin y$, $P=(0,\frac{\pi}{4}), \boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3})$