練習 1.1 の解答

練習 1.1 (1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}=\frac{4+14+10}{2+2}=7$$

講評　みんなできていました。

(2)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ux-x-u}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+u)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\frac{1+u}{4}$$

講評　みんなできていました。

(3)

$$\lim_{x\to \pi/2} x\cos x=0$$

講評　$x=\frac{\pi}{2}+t$ とかいて $\cos x=-\sin t$ としたのだけど、なぜか $\lim_{t\to 0}\sin t=1$ としてしまった人が何人かいました。$\sin 0=0$ ですからこの極限は 0 ですね。

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\frac{\sin x}{4x}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{4}$$

講評　済みません。ミスプリントで問題が $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \sin 4x}}\tan x$ を求めよという、わけの分からないものになってしまいました。この問題はやらなくても良いと講義で言ったのですが、聞こえなくて悩んだ人がいたようです。

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-5}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+3x)-(2x^2-5)}{\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-5}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}}+\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}}\\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

講評　分子の有理化をする問題ですね。気がつかなかった人も何人かいました。典型的な問題なので、覚えておいて下さい。

(6)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$$

講評　この問題が一番難しかったようです。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$$

とやることに抵抗を覚えた人も多いでしょう。なんとなくかっこの中だけ先に極限を取って良いのか気になるところですね。ここが気持悪いと感じた人はいい数学的センスを持っています。すこし、この辺をきちんとやるには、まず、

$$\text{各 } n \text{ について } a_n\leq b_n \text{ であり、}\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \text{ ならば } \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$$

ということに注意します。はさみうちの原理の変形です。「追い出しの原理」と呼ぶ人がいたとか。まあ、気持は分かります。 a_n が b_n を追い出している訳ですから。さて、そこで、 x に対して自然数 n を $n\leq x<n+1$ となるように選びます。すると、$1+\dfrac{1}{x}\geq 1+\dfrac{1}{n+1}>1$ ですから両辺を x^2 乗して

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\geq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x^2}$$

$1+\frac{1}{n+1}>1$ なので、右辺は x について単調に増加しているから、$x\geq n$ をつかったら

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x^2}\geq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$$

ここで、2 項定理から

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}=1+\frac{n^2}{n+1}+(\text{正の項})$$

とかけるから、

$$\text{右辺}\geq 1+\frac{n^2}{n+1}\to\infty(n\to\infty)$$

$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$ なので、$1+\frac{n^2}{n+1}$ が

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

を追い出している分けです。したがって、

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\infty$$

と言えます。