練習 2.1 の解答

練習 1.1 前回講義で話した事は、媒介変数で表された関数 $x = x(t), y = y(t)$ があるとき、 $\dfrac{dy}{dx}$ は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{1}$$

として計算できるという事でした。もちろん分母がゼロになるといけないので、$\frac{dx}{dt} \neq 0$ が必要になります。このとき、x は単調増加か単調減少になるので、x と t は 1 対 1 になるので、$\frac{dy}{dx}$ の $x = x(t_0)$ における値が知りたければ上の式 (1) の右辺に $t = t_0$ を代入するとよいという事になります。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}a(1-\cos t) = a\sin t$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}a(t-\sin t) = a(1-\cos t)$$

なので、 $x = a\pi$ になるのは $t = \pi$ のときなので、

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{a\sin\pi}{a(1-\cos\pi)} = 0.$$

講評　はじめての事なので、何を計算したら良いのか戸惑った人が多かったようです。やり方が分かれば何でもない事ですが。

練習 2.2 の解答

これは合成関数の微分の計算問題です。皆さん、やり方は分かっていても計算間違いが多いところですが、さらに、始めて習った双曲線関数や逆三角関数の微分が入り乱れていて、混乱した人も多かったようです。混乱した時は原点に戻って、暗算でなく合成関数の微分の公式に戻って計算する事です。これでずいぶんミスが防げると思います。それではそれぞれの問題の解答をします。

(1)　$\log(\cosh x)$ を微分する。この関数は $z = \log y$ に $y = \cosh x$ を代入した合成関数なので、

$$\frac{d\log(\cosh x)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

と計算すればいい。

講評　対数関数の微分が変な人が何人かいました。復習しておいて下さい。他の問題よりもできは良かったです。

(2)　$\sin^{-1}(3x+1)$ を微分する。この関数は $z = \sin^{-1} y$ に $y = 3x+1$ を代入した合成関数なので、

$$\frac{d\sin^{-1}(3x+1)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}.$$

と計算すれば良い。

講評　良くできていました。最後の根号の中を計算するか否かは、その後の式の使い方によりますね。とくに計算しなければ間違いという訳ではありません。

(3)　$\cos^{-1}(x^2+x)$ を微分する。この関数は $z = \cos^{-1} y$ に $y = x^2+x$ を代入した合成関数なので、

$$\frac{d\cos^{-1}(x^2+x)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}(2x+1) = -\frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$$

となる。

講評　これも良くできていました。もっとも逆三角関数の微分で戸惑う人もまだ大分います。

(4)　$e^{\tan x}$ を微分する。この関数は $z = e^y$ に $y = \tan x$ を代入した合成関数なので、

$$\frac{de^{\tan x}}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = e^y\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

となる。

講評　これも良くできていました。ただ、 $e^{\tan x}$ がいつの間にか e^x になってしまっている人がいました。

(5)　$\tan(\cos^{-1} x)$ を微分する。この関数は $z = \tan y$ に $y = \cos^{-1} x$ を代入した合成関数なので、

$$\frac{d\tan(\cos^{-1} x)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 y}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(\cos(\cos^{-1} x))^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

と計算する。 $\cos^{-1} x$ は $\cos x$ の逆関数だから

$$\cos(\cos^{-1} x) = x$$

であることに注意しましょう。

講評　この問題が一番難しかったようです。逆三角関数の使い方になれる事が必要ですね。

(6)　$x^3\tan^{-1}e^x$ の微分を計算する。これも $z=\tan^{-1}e^x$ を $z=\tan^{-1}y, y=e^x$ とかくことにより、

$$\frac{dx^3\tan^{-1}e^x}{dx}=\frac{dx^3z}{dx}=3x^2z+x^3\frac{dz}{dx}$$

で、

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+y^2}e^x=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

となるので、まとめて、

$$\frac{dx^3\tan^{-1}e^x}{dx}=3x^2\tan^{-1}e^x+\frac{x^3e^x}{1+e^{2x}}$$

を得る。

講評　これは面倒ですね。積の微分と合成関数の微分と二つを組み合わせた問題でした。でも心配したよりできは良かったです。