練習 4.1 と練習 4.2 の解答

練習 4.1 微分の復習です。覚えているかどうかを調べました。

(1) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(3) $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(4) $(\sinh x)' = \cosh x$

(5) $(\log(1+e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x}$

講評　良くできていました。一番できが悪かったのは (4) 番でした。$\sin(hx)$ と $\sinh x$ とが混乱している感じです。間違った人は双曲線関数の計算を練習しておいて下さい。(例 $\sinh x = 2$ ならば x はいくらになるか？)

練習 4.2　Leibnitz の公式の練習問題です。まず

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

だから、$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$ に注意して、

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - f(x)^2$$

(1)　$f(x)^2 = f(x) \cdot f(x)$ であるから Leibnitz の公式を使わなくても (1) は計算できるのですが、ここではせっかくだから使ってみましょう。

$$f'(x) = 1 - f^2(x) = 1 - f(x)f(x) \tag{1}$$

が成り立っているので、これを $n-1$ 回微分すると Leibnitz の公式により、

$$f^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-1-k)}(x) \tag{2}$$

まず、定義から

$$f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

なので、$f(0) = 0$ がわかる。これを (1) に $x = 0$ として代入すると、$f'(0) = 1 - f(0)^2 = 1$ がわかる。この二つを $n = 2, x = 0$ として (2) に代入すると、

$$f^{(2)}(0) = -f'(0)f(0) - f(0)f'(0) = -2f(0)f'(0) = 0$$

さらに、$n = 3, x = 0$ を (2) に代入すると、

$$f^{(3)}(0) = -2(f(0)f^{(2)}(0) + f'(0)^2) = -2$$

となる。

講評　$f(0), f'(0)$ はみんな良くできていました。$f^{(2)}(0)$ を計算する時、(1) から

$$f^{(2)}(x) = 1 - (f'(x))^2 \quad \text{さらに一般に} \quad f^{(n)}(x) = 1 - (f^{(n-1)}(x))^2$$

とやった人はみんな間違いです。実際、(1) の両辺を微分すれば違いが分かるはずです。$f^{(3)}(0)$ を求める問題は、それまでで精力を使いはたしてダウンした人が出てきています。力づくではこの辺が限界ですね。なにかうまい方法を考える必要が出てきます。うまくライプニッツの公式が使えるようになると大分楽になります。

(2)　上と同じ様にして $f^{(4)}(0)$ を計算すると、

$$f^{(4)}(0) = -\Big(2f(0)f^{(3)}(0) + 6f'(0)f^{(2)}(0)\Big) = 0$$

これから、$f^{(2n)}(0) = 0$ と予想を立てて、数学的帰納法で確かめてみましょう。ここで使う数学的帰納法は高校でやった数学的帰納法よりもすこしレベルが高いです。

どう高いかというと、「$k = 1, 2, 3, \dots, n$ まで $f^{(2k)}(0) = 0$ が正しい」と仮定して 「$k = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ まで まで $f^{(2k)}(0) = 0$ が正しい」と結論する事により、すべての n について $f^{(2n)}(0) = 0$ を証明するので、 これまでのすべての偶数次の微分に関する仮定が必要になるところが高校ではやっていない帰納法の仮定の仕方ですね。

とにかく、「$k = 1, 2, 3, \dots, n$ まで $f^{(2k)}(0) = 0$ が正しい」と仮定します。($n = 0, 1$ ではこれは正しい。) (2) により、

$$f^{(2n+2)} = -\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} f^{(k)}(0) f^{(2n+1)}(0) \tag{3}$$

k が偶数の時、$k \leq 2n$ だから帰納法の仮定より $f^{(k)}(0) = 0$ 一方、k が奇数の時、$k \geq 1$ なので、$2n + 1 - k \leq 2n$ は偶数ですから、従って帰納法の仮定が使えて $f^{(2n+1-k)}(0) = 0$ がわかります。したがって $k \leq 2n + 1$ のとき、

$$f^{(k)}(0) f^{(2n+1-k)}(0) = 0$$

が常に成り立っていて、(3) より、結果として $f^{(2n+2)}(0) = 0$ が分かるのです。帰納法の仮定とこれをあわせると「$k = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ まで まで $f^{(2k)}(0) = 0$ が正しい」ということが示せた事になります。

講評　いいところまでいった人が数人といったところです。残念ながらこれは（予想通り）全滅です。ライプニッツの公式はうまく使えばとても便利なっだけに、惜しいですね。復習しておいて欲しいですね。