練習 5.1 の解答

練習 5.1 習ってすぐにテイラー展開をしろというのは難しかったようですね。

(1) $\sin x$ を $x=0$ でテイラー展開（マクローリン展開）せよ。剰余項が 0 に近づくことを証明せよ。

(2) $\sinh x$ を $x=0$ でテイラー展開（マクローリン展開）せよ。剰余項が 0 に近づくことを証明せよ。

(3) $(1+x^2)^{1/3}$ を $x=0$ でテイラー展開（マクローリン展開）せよ。(これは形式的な計算だけでいい)

(1) 講義中に例で $\cos x$ のマクローリン展開をやったので、これと同じようにやれば良いのですが。とにかく、形式的な計算を先にしましょう。$f(x)=\sin x$ に対して $f^{(n)}(0)$ を求めてみましょう。

$$f(x)=\sin x, \quad f'(x)=\cos x, \quad f''(x)=-\sin x$$

なので、$f''(x)=-f(x)$ が成り立つ。この両辺を $2(k-1)$ 回微分すると、

$$f^{(2k)}(x)=-\big(f''(x)\big)^{2(k-1)}=-f(x)^{2(k-1)}$$

これで漸化式を解くと

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k f(x)=(-1)^k \sin x$$

$f''(x)=-f(x)$ を $2k-1$ 回微分すると

$$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k f'(x)=(-1)^k \cos x$$

となるので、$x=0$ を代入して

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & n=2k \text{ のとき }, \\ (-1)^k & n=2k+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

これから形式的には $f(x)=\sin x$ の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）は

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$$

となるはずだと目星がつきます。剰余項を調べてみましょう。$2k$ 次までのテイラー展開は

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin c$$

なので、剰余項は

$$R_{2k}=(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin c \quad (c=\theta x, 0<\theta=\theta(2k,a,x)<1)$$

$2k+1$ 次までのテイラー展開は

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos c$$

なので、剰余項は

$$R_{2k}=(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin c \quad (c=\theta x, 0<\theta=\theta(2k+1,a,x)<1)$$

どちらにしても $|\sin y|, |\cos y|\le 1$ だから

$$R_n \le \frac{x^n}{n!}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

がわかり、上の形式的な展開は正しい事がいえます。

講評 これが一番良くできていました。例で $\cos x$ のマクローリン展開をやっていたので分かりやすかったのだろうと思います。一番多い間違いは、せっかく $f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$ まで出しておきながら、最後にテイラー展開の公式に代入する時に

$$\sin x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4'!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

と、$\cos x$ と同じ式を書いてしまった間違いでした。次に多かったのが第 $2k+1$ 項で止めてしまって

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

としている間違いでした。後者の間違いは後ろに $+\ldots$ と書けば正解なのに惜しいですね。剰余項も $|\cos x|, |\sin x|\le 1$ に気づいた人はちゃんとできていました。

(2) 上と同じ様にして

$$f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x, \quad f''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

これから $f''(x)=f(x)$ となり、$f^{(2k)}(x)=f(x)=\sinh x$ と $f^{(2k+1)}(x)=f'(x)=\cosh x$ がわかります。したがって $f^{n)}(0)$ は

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & n=2k \text{ のとき}, \\ 1 & n=2k+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

がわかるので、形式的な展開は

$$\sinh x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$$

となります。剰余項が 0 に近づく事を確かめましょう。n 次までのテイラー展開により、$n=2k$ のとき

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sinh c$$

$n=2k+1$ のとき

$$\sinh x = x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cosh c$$

となります。c は n にも依存しますが、$|c| \le |x|$ ではあるので、$|\sinh c| \le \cosh|x|$, $\cosh c \le \cosh x$ である事に注意すると、剰余項は

$$|R_n| \le \frac{x^n}{n!}\cosh|x|$$

をみたし、 $n \to \infty$ のとき右辺は 0 に近づきます。（収束する）

したがって、上の形式的な展開は正しいのです。

講評　(1) より正解は大分少なくなってますが。数人の人がちゃんとできていました。ここで惜しかったのは $|\sinh x| \le 1$ とした人や、もっと惜しいのは $\sinh c, \cosh c$ は定数なので、$x^n/(n!)$ が 0 に行くから 剰余項は 0 に行くと書いた人です。ほとんどあっていますが、 c は n とともに変化はします。c が 0 と x の間にあるからこれらは $\cosh x$ で押えられ、$\cosh x$ は n について定数なので剰余項は 0 に行く訳です。

(3)　まず、形式的にテイラー展開を求めてみます。そのまま微分すると面倒なので、教科書 p.48 の例 11 (5) を使います。

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

ここで、 x のところに x^2 を代入して

$$(1+x^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^4 + \ldots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^{2n} + \ldots$$

とすれば良い訳です。

参考までに、この剰余項の評価をしておきます。このためにはこれまでの剰余項の表現と違う表し方が必要となります。

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!} + \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right]\frac{x-t}{x-a}$$

とおくと、$h(a)=h(x)=f(x)$ が成り立つので、ロルの定理から $h'(c)=0$ となる c があります。これを書き直すと、

$$f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{x-a}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right]$$

となり、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$$

がわかります。（この剰余項をコーシーの剰余項という。）これを使います。$f(x)=(1+x)^{1/3}$ に対するコーシーの剰余項は

$$(1+c)^{1/3-n}x(x-c)^{n-1}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{(n-1)!}$$

まず、

$$\left|\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n)}{n!}\right| \le 1$$

で、c は 0 と x の間なので、 $c=\theta x$, $0<\theta<1$ とかくと、

$$\left|\frac{x-c}{1+c}\right| = \left|\frac{|x|(1-\theta)}{1+\theta x}\right| < 1$$

となり、$|x|<1$ のとき 剰余項が 0 に近づく事が分かるのです。

講評　これはさっぱりでした。教科書の例を参考にしなさいといいましたが、聞き取れていた人はわずかでした。直接微分すると面倒ですね。

テイラー展開の各項の形が分かっている関数はそう多くないので覚えてしまうのも手ですよね。