練習 8.1, 8.2 の解答

練習 8.1 次の関数について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を確認せよ。

(1) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$　(2) $f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$

解

(1)

$$\begin{aligned} f_x &= 4xy^3 - 3x^2y^5, & f_{xy} &= 12xy^2 - 15x^2y^4 \\ f_y &= 6x^2y^2 - 5x^3y^4, & f_{yx} &= 12xy^2 - 15x^2y^4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{y}{1+(xy)^2}, & f_{xy} &= \frac{1+(xy)^2 - 2x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2} \\ f_y &= \frac{x}{1+(xy)^2}, & f_{yx} &= \frac{1+(xy)^2 - 2y^2x^2}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2} \end{aligned}$$

講評　大分少なくなりましたが、まだ逆三角関数の微分が覚えられていない人がいます。必ず覚えておいて下さい。また、偏微分の記号が $\dfrac{d}{dx}, \dfrac{d}{dy}$ と書いている人は約束通り減点しました。$'$ を使っている人もいますが、これも変数がたくさんある時は何について偏微分しているのか分からなくなるので、止めて下さい。必ず $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ 達を使うか f_x, f_y 等の記号を使ってどの変数について偏微分しているかはっきりさせて下さい。

練習 8.2 ラプラシアン作用素 Δ を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で定義する。このとき、次の関数について Δf を計算せよ。

(1) $f(x,y) = x^3y - y^3x$　(2) $f(x,y) = \log(4x^2 + 4y^2)$

(3)$f(x,y) = 3x^4y^5 - 2x^2y^3$

解

(1)

$$\begin{aligned} & f_x = 3x^2y - y^3, \quad f_{xx} = 6xy \\ & f_y = x^3 - 3y^2x, \quad f_{yy} = -6xy = -f_{xx} \\ & \quad \therefore \Delta f = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ & f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -f_{xx} \\ & \quad \therefore \Delta f = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$f_x = 12x^3y^5 - 4xy^3, \quad f_{xx} = 36x^2y^5 - 4y^3$$
$$f_y = 15x^4y^4 - 6x^2y^2, \quad f_{yy} = 60x^4y^3 - 12x^2y$$
$$\therefore \Delta f = 60x^4y^3 + 36x^2y^5 - 12x^2y - 4y^3$$

講評　良くできていましたが、これも逆三角関数の微分がおかしい人が何人かいます。(3) が引っかけ問題になってしまいました。(1),(2) が $\Delta f = 0$ つまり f_{xx} と f_{yy} の符号が違ったので、(3) でつられて $\Delta F = f_{xx} - f_{yy}$ としてしまった人がいました。惜しいですね。