練習 9.1, 9.2 の解答

練習 9.1 次の関数で定義される曲面上の指定された点における接平面の方程式を求めよ

(1) $z = xe^y + xy$ ； $(2, 0, 2)$ (2) $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ ； $(1, 3, \sqrt{7})$

解 (1) $F(x, y, z) = xe^y + xy - z$ とおくと、この曲面の方程式は $F(x, y, z) = 0$. この曲面上の点 $(2, 0, 2)$ における接平面の方程式は

$$F_x(2, 0, 2)(x - 2) + F_y(2, 0, 2)y + F_z(2, 0, 2)(z - 2) = 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} F_x &= e^y + y, \quad \therefore F_x(2, 0, 2) = 1 \\ F_y &= xe^y + x, \quad \therefore F_y(2, 0, 2) = 4 \\ F_z &= -1 \end{aligned}$$

したがって、求める接平面の方程式は

$$(x - 2) + 4y - (z - 2) = 0 \quad \text{i.e.} \quad x + 4y - z = 0$$

(2) $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$ とおくと、この曲面の方程式は $F(x, y, z) = 0$. この曲面上の点 $(1, 3, \sqrt{7})$ における接平面の方程式は

$$F_x(1, 3, \sqrt{7})(x - 1) + F_y(1, 3, \sqrt{7})(y - 3) + F_z(1, 3, \sqrt{7})(z - \sqrt{7}) = 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} F_x &= 2x, \quad \therefore F_x(1, 3, \sqrt{7}) = 2 \\ F_y &= -2y, \quad \therefore F_y(1, 3, \sqrt{7}) = -6 \\ F_z &= 2z, \quad \therefore F_z(1, 3, \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

したがって、求める接平面の方程式は

$$2(x - 1) - 6(y - 3) + 2\sqrt{7}(z - \sqrt{7}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad x - 3y + \sqrt{7}z + 1 = 0$$

となる。

練習 9.2 次の関数の指定された点 P における指定された方向 $\vec{v}$ に関する方向微分を求めよ。（注意 $\vec{v}$ は単位ベクトルとは限らないのでまず、その方向の単位ベクトルを求める必要がある。）

(1) $f(x, y) = x^2 y$, $P = (1, 2), \vec{v} = (3, -4)$

(2) $f(x, y) = e^x \sin y$, $P = (0, \frac{\pi}{4}), \vec{v} = (1, \sqrt{3})$

解 (1) $\vec{v}$ 方向の単位ベクトルは $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ であり、$f_x = 2xy, f_y = x^2$ なので、$(1, 2)$ における $\vec{v}$ 方向の方向微分は

$$\frac{3}{5} f_x(1, 2) - \frac{4}{5} f_y(1, 2) = \frac{12}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

(2) $\vec{v}$ 方向の単位ベクトルは $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ であり、$f_x = e^x \sin y, f_y = e^x \cos y$ なので、$(0, \frac{\pi}{4})$ における $\vec{v}$ 方向の方向微分は

$$\frac{1}{2} f_x(0, \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2} f_y(0, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

講評