

練習 10.1 の解答

練習 10.1 次の関係式で決まる w について w_t, w_s を求めよ。

$$(1) w = x^2 y; \quad x = st, y = s - t \qquad (2) w = x^2 - y \log x; \quad x = s/t, y = s^2 t$$

$$(3) w = e^{x^2 + y^2}; \quad x = s \sin t, y = t \sin s \qquad (4) w = \log(x + y) - \log(x - y); \quad x = te^s, y = e^{st}$$

解 (1)

$$w_x = 2xy, w_y = x^2; \quad x_s = t, x_t = s, y_s = 1, y_t = -1$$

だから、

$$\begin{aligned} w_s &= w_x x_s + w_y y_s \\ &= 2xyt + x^2 = 2s(s-t)t^2 + s^2 t^2 \\ &= 3s^2 t^2 - 2st^3 \\ w_t &= w_x x_t + w_y y_t \\ &= 2xys - x^2 = 2s^2 t(s-t) - s^2 t^2 \\ &= 2s^3 t - 3s^2 t^2 \end{aligned}$$

(2)

$$w_x = 2x - y/x, w_y = -\log x; \quad x_s = 1/t, x_t = -s/t^2, y_s = 2st, y_t = s^2$$

だから

$$\begin{aligned} w_s &= w_x x_s + w_y y_s \\ &= (2x - y/x)/t - 2st \log x = (2s/t - st^2)/t - 2st \log(s/t) \\ &= 2s/t^2 - st - 2st \log(s/t) \\ w_t &= w_x x_t + w_y y_t \\ &= -(2x - y/x)s/t^2 - s^2 \log(s/t) = -(2s/t - st^2)s/t^2 - s^2 \log(s/t) \\ &= s^2 - 2s^2/t^3 - s^2 \log(s/t) \end{aligned}$$

(3)

$$w_x = 2xe^{x^2 + y^2}, w_y = 2ye^{x^2 + y^2}; \quad x_s = \sin t, x_t = s \cos t, y_s = t \cos s, y_t = \sin s$$

だから、

$$\begin{aligned} w_s &= w_x x_s + w_y y_s \\ &= e^{x^2 + y^2} (2x \sin t + 2yt \cos s) = e^{s^2 \sin^2 t + t^2 \sin^2 s} (2s \sin^2 t + 2t^2 \sin s \cos s) \\ w_t &= w_x x_t + w_y y_t \\ &= e^{x^2 + y^2} (2xs \cos t + 2y \sin s) = e^{s^2 \sin^2 t + t^2 \sin^2 s} (2s^2 \sin t \cos t + 2t \sin^2 s) \end{aligned}$$

(4)

$$w_x = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}, w_y = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}; x_s = te^s, x_t = e^s, y_s = te^{st}, y_t = se^{st}$$

だから、

$$\begin{aligned}w_s &= w_x x_s + w_y y_s \\ &= \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) te^s + \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) te^{st} \\ &= \frac{-2yte^s + 2xte^{st}}{x^2 - y^2} = \frac{2t(t-1)e^{s+st}}{t^2 e^{2s} - e^{2st}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_t &= w_x x_t + w_y y_t \\ &= \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) e^s + \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) se^{st} \\ &= \frac{-2ye^s + 2xse^{st}}{t^2 e^{2s} - e^{2st}} \\ &= \frac{2(ts-1)e^{s+st}}{t^2 e^{2s} - e^{2st}}\end{aligned}$$

講評 面倒臭い計算だったので、手際良く計算しないと間違えます。

とにかくまず連鎖公式を書いて、そこに代入する方法を取るべきですが、 x, y が残ったままでもきちんとした式を書いていけば正解としました。必要があればすべてを s, t で表さないといけません、まず、間違いのない式を書いておく事が大事です。

最初に w を s, t の式に書き直して偏微分した人は、連鎖公式を利用した人達に比べて、計算間違いをした人の割合が多いです。つまり、

連鎖公式が間違いを少なくしてくれる
という事です。

全体として、思ったよりたくさんの方が、しっかり計算ができていました。良くできていたと思います。