練習 12.1 の解答**練習問題の番号が間違って 11.1 になっていました。訂正します。**

練習 12.1

(1) $(0,0),(4,0),(0,1)$ の 3 点を頂点とする三角形内（境界も含む）を (x,y) が動く時、関数

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$$

の最大値、最小値とそれらを取る点を求めよ。

(2) 円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ のプレート上の温度分布は

$$T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$$

によって与えられる事が分かっている。このとき、このプレート上で最も熱いスポット（点）ともっとも冷たいスポットの座標とその点の温度を求めよ。

解答 (1) この三角形（周も含む）は $\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合だから、連続関数 $f(x,y) = 2x^2+y^2-4x-2y+5$ はこの三角形上で最大値および最小値を取る。極値の候補は $f_x = f_y = 0$ を満たす点か、周上の点。$f_x = 4x-4$, $f_y = 2y-2$ だから $f_x = f_y = 0$ を満たすのは $x = y = 1$ となり、点 $(1,1)$ がその候補だが、この点は三角形の外だから不適。

そこで周上の関数の動きを調べる。

1. 線分 $(0,0)-(4,0)$ 上の動き

   $f(x,0) = 2x^2 - 4x + 5$, $0 \leq x \leq 4$ を見れば良く、このとき、f は $x = 1$, $y = 0$ で最小値 3、$x = 4$, $y = 0$ で最大値 21 をとる。

2. 線分 $(0,1)-(4,0)$ 上の動き

   (x,y) は $y = \frac{-1}{4}x + 1$, $0 \leq x \leq 4$ を動くので、

   $$f(x,-x/4+1) = 2x^2+(-x/4+1)^2-4x+(x-4)/2+5 = \frac{33x^2}{16}-4x+4$$

   を $0 \leq x \leq 4$ で考える。このとき、$x = \frac{32}{33}, y = \frac{25}{33}$ で最小値 $\frac{68}{33}$ をとり、$x = 4$, $y = 0$ で最大値 21 を取る。

3. 線分 $(0,0)-(1,0)$ 上の動き

   $f(0,y) = y^2 - 2y + 5$, $0 \leq y \leq 1$ なので、$x = 0$, $y = 1$ で最小値 4 をとり、$x = 0, y = 0$ で最大値 5 を取る。

以上より、与えられた関数 f はこの三角形上 $(\frac{32}{33}, \frac{25}{33})$ で最小値 $\frac{68}{33}$ をとり、$(4, 0)$ で最大値 21 を取る。
(2)　$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおくと、プレートの周上では $F(x, y) = 0$ が成り立っている。

まず、極値の候補は
（ア） 内部で $T_x = T_y = 0$ を満たすか、あるいは
（イ） 周上において、$F_x = F_y = 0$ を満たすか、 ある実数 λ に対して $T_x = \lambda F_x, T_y = \lambda F_y$ を満たす。
のどちらかである。

$T_x = 4x, T_y = 2y - 1$ なので、$T_x = T_y = 0$ を満たす点は $(0, 1/2)$. これはこのプレートの内部の点なので、極値の候補となり得る。$T_{xx} = 4, T_{xy} = 0, T_{yy} = 2$ なので、判別式は $0 - 8 < 0$ であり、$T_{xx} > 0$ だから T は $(0, 1/2)$ で極小値 $-1/4$ をとる。

一方、 周上で極値を取る場合を考えよう。

$F_x = F_y = 0$ となる点は $(0, 0)$ であり、これはプレートの周上に無いので不適である。

したがって、 周: $\{x^2 + y^2 = 1\}$ の上で極値を取る時は

$$4x = 2\lambda x, \quad 2y - 1 = 2\lambda y$$

が成り立っている。最初の式から $x = 0$ または $\lambda = 2$ である。

1) $x = 0$ のとき、$x^2 + y^2 = 1$ が周上で成り立っているので、$y = \pm 1$.
   - $x = 0, y = 1$ のとき、$T(0, 1) = 0$.
     また、二つ目の式から $\lambda = 1/2$ となる。
   - $x = 0, y = -1$ のとき、$T(0, -1) = 2$.
     また、二つ目の式から $\lambda = 3/2$ となる。
2) $\lambda = 2$ のとき、$y = -1/2$ で、$x^2 + y^2 = 1$ だから $x = \pm\sqrt{3}/2$. このとき、

$$T(\frac{\pm\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

したがって、これらの極値の候補の値を比べる事により、最も熱いスポットの座標は $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ で、その点での温度は $9/4$, 最も冷たいスポットの座標は $(0, 1/2)$ で、その点での温度は $-1/4$ である。

講評　一回の講義にたくさんの事を盛り込みすぎたようで、皆さんが消化不良に陥っている様子が良く分かります。できは散々でした。

基本的には、この問題は前回勉強した「極値問題」と、今回勉強した「条件つき極値問題」（Lagrange の乗数法）合わせた問題です。解き方の順番は、以下のようになります。

a. (x, y) の動く範囲が有界閉集合であるならば、必ず連続な関数はその上で最大値と最小値を持つ。 (x, y) が動く範囲が有界な閉集合であることを確かめる。

b. 問題の関数を $f(x, y)$ とすると、f が考えている集合の内点 (a, b) で極値をとるならば、

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

が成り立つ。これから (a, b) を求め、判別式と $f_{xx}(a, b)$ の符号を調べて極値かどうか判定する。$f(a, b)$ を求めておく。

c (x, y) が動く範囲の境界（周上）ではいつでも最大値、最小値を取る可能性があるので、調べる必要がある。境界が (2) のように単一の方程式 $F(x, y) = 0$ を満たしている時は Lagrange の乗数法が使える。したがって、境界上で極値を取る点 (a, b) では

c-1 $F_x(a, b) = F_y(a, b) = 0$ が成り立つか、

c-2 ある実数 λ に対して

$$f_x(a, b) = \lambda F(a, b), \qquad f_y(a, b) = \lambda F_y(a, b)$$

が成り立つ。これを解いて $(a, b), f(a, b)$ を求める。

(1) のようにいくつかの曲線で境界ができている時は、それぞれの曲線で (x, y) の動く範囲に気を付けながら Lagrange の乗数法を使う事になるが、 (1) では境界は線分なので $y = c_i x + b_i$, $(\alpha_i \leq x \leq \beta_i)$ がそれぞれの i について成り立つので、これを代入して極大、極小を考える方が早い。上の解答ではそのようにしている。（実際に線分は３つある。）

d 最後にこれまでに出てきた極値の候補達を比べ、一番大きい値が最大値、一番小さい値が最小値となる。