微分積分学 1 模擬テスト問題と解答 (2011 年 07 月 26 日 (火曜日) 1 限)

1. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $2\log(x^3+2x+1)$ (2) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(3) $\pi x^\pi + \pi^x$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (5) $x\sin^{-1}x$

[**解答**] (1) $f(x) = 2\log(x^3+2x+1)$ とかくと、

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{2(3x^2+2)}{x^3+2x+1}$$

(2) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とかくと、

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

(3) $f(x) = \pi x^\pi + \pi^x$ とかくと、

$$\frac{df(x)}{dx} = \pi^2 x^{\pi-1} + \pi^x \log\pi$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ とかくと、

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{3/2}}$$

(5) $f(x) = x\sin^{-1}x$ とかくと、

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1}x$$

2. 次の問に答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ が成り立つ事を証明せよ。

(2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ の $x = 0$ におけるテイラー展開（マクローリン展開）を求めよ。ただし、$|x| < 1$ とする。

[**解答**] (1) $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ を $x \geq 0$ で考える。

$$f'(x) = e^x - 1 - x, \qquad f''(x) = e^x - 1 \geq 1$$

なので、$x \geq 0$ のとき、$f'(x)$ は広義単調増加で、 $f'(0) = 0$ なので、$f'(x)$ は $x \geq 0$ のとき 0 以上。したがって $f(x)$ は $x \geq 0$ で広義単調増加。$f(0) = 0$ だから、 $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ である。書き直すと、$x \geq 0$ のとき

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(2)$f(y) = \dfrac{1}{1+y}$ とおく。$f'(y) = -(1+y)^{-2}$, $f''(y) = 2(1+y)^{-3}, \ldots, f^{(n)}(y) = (-1)^n n!(1+y)^{-(n+1)}$ であるから、テイラーの 定理により、$y = 0$ で n 次まで展開すると、

$$\begin{aligned} f(y) &= 1 - y + \frac{2}{2}y^2 + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(n-1)!}y^{n-1} + (-1)^n\frac{n!}{n!}\frac{y^n}{(1+\theta y)^{n+1}} \\ &= 1 - y + y^2 + \ldots + (-y)^{n-1} + \frac{1}{(1+\theta y)^{n+1}}(-y)^n \end{aligned}$$

が $0 < \theta < 1$ で成り立つ。ここで $y = x^2$ とおくと、

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-x^2)^{n-1} + \frac{1}{(1+\theta x^2)^{n+1}}(-x^2)^n$$

$1 + \theta x^2 \geq 1$ で、$|x| < 1$ だから $n \to \infty$ のとき

$$|\frac{1}{(1+\theta x^2)}^{n+1}(-x^2)^n| \leq x^{2n} \to 0$$

したがって

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-x^2)^n + \ldots$$

3. 次の関数の２次の偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

(1) $f(x,y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$ (2) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-4y)}$

[**解答**] (1) $f_x = y - \frac{2}{x^2}$, $f_y = x - \frac{4}{y^2}$ だから、

$$f_{xx} = \frac{4}{x^3}, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = \frac{8}{y^3}$$

(2) $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2-4y)}$, $f_y = (4-2y)e^{-(x^2+y^2-4y)}$ だから、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (-2+4x^2)e^{-(x^2+y^2-4y)} \\ f_{xy} &= -2x(4-2y)e^{-(x^2+y^2-4y)} \\ f_{yy} &= (-2+(4-2y)^2)e^{-(x^2+y^2-4y)} \end{aligned}$$

4. 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9x^2 + 9y^2 + 12xy$ の極値を調べよ。

[**解答**] 極値を取る点を (a, b) とするとき、この点では

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

が成り立っている。 $f_x(a, b) = 3a^2 + 18a + 12b, \quad f_y(a, b) = 3b^2 + 18b + 12a$ なので、両方が 0 であるという式を連立して、$a^2 + 6a + 4b = 0,\ b^2 + 6b + 4a = 0$ 二つの式の差を取って、

$$a^2 - b^2 + 6(a - b) + 4(b - a) = 0 \quad \therefore (a - b)(a + b + 2) = 0$$

したがって、 $a = b$ または $a + b + 2 = 0$ が成り立つ。

$a = b$ のとき、$a^2+10a = 0$ なので、$a = b = 0$ または $a = b = -10$ となる。$(0, 0), (-10, -10)$ が極値をとる点の候補。

$a + b + 2 = 0$ のとき、$a^2 + 6b + 4(-a - 2) = 0$ となり、$a^2 + 2a - 8 = 0$ より、$a = -4, 2$ となる。このとき、$(a, b) = (-4, 2), (2, -4)$ が極値を取る点の候補。

$$f_{xx} = 6x + 18,\ f_{xy} = 12,\ f_{yy} = 6y + 18$$

であるから、

$$D(0, 0) = f_{xy}(0, 0)^2 - f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) = (12)^2 - (18)^2 < 0$$

$f_{xx}(0, 0) = 18 > 0$ であるから、f は $(0, 0)$ で極小値 0 をとる。

$$D(-10, -10) = (12)^2 - (-42)^2 < 0$$

$f_{xx}(-10, -10) = -42 < 0$ であるから、f は $(-10, -10)$ で極大値 1000 をとる。

$$D(-4, 2) = D(2, -4) = (12)^2 - 30 \times (-6) > 0$$

なので、$(-4, 2), (2, -4)$ の 2 点では極値を取らない。

5. (x,y) が集合 $x^2+y^2=1$ を満たしながら変化する時、関数 $f(x,y)=x^3-3xy^2$ の最大値と最小値および、それらを取る点の座標を求めよ。

ヒント：$F(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると、Lagrange の乗数法から $F_x(a,b)=F_y(a,b)=0$ またはある実数 λ に対して $f_x(a,b)=\lambda F_x(a,b), f_y(a,b)=\lambda F_y(a,b)$ となる点 (a,b) で $F(a,b)=0$ を満たす点を探せば良い。

[**解答**] $F(x,y)=0$ を満たす点の全体は、原点中心半径 1 の円周上にあるので、これは有界な閉集合。したがって連続な関数 $f(x,y)=x^3-3xy^2$ はこの集合上で最大値と最小値をとる。

Lagrange の乗数法により、極値を取る点では

$$F_x=F_y=0$$

が成り立つか、ある実数 λ に対して

$$f_x=\lambda F_x, \quad f_y=\lambda F_y$$

が成り立つ。$F_x=2x, \quad F_y=2y$ なので、$F_x=F_y=0$ ならば $(x,y)=(0,0)$ だが、これは $F(0,0)=-1$ となり、条件を満たしていない。不適。

したがって、後半の式が成り立つが、

$$f_x=3x^2-3y^2=\lambda 2x, \quad f_y=-6xy=\lambda 2y$$

後半の式から $y=0$ または $x=-\lambda/3$. $x^2+y^2=1$ より、$y=0$ のとき、$x=\pm 1$ で、$x=1$ のとき $\lambda=\frac{3}{2}$, $x=-1$ のとき $\lambda=-\frac{3}{2}$ で上の連立方程式が満たされている。

$f(-1,0)=-1$, $f(1,0)=1$ である。

$x=-\lambda/3$ のとき、前半の式に代入して

$$\frac{\lambda^2}{3}-3y^2=-\frac{2\lambda^2}{3}$$

これより、$y=\pm\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ となり、これを $x^2+y^2=1$ に代入すると、

$$\frac{\lambda^2}{9}+\frac{\lambda^2}{3}=1 \quad \therefore \lambda=\pm\frac{3}{2}$$

よって、$x=\pm\frac{1}{2}$ のとき、$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ で、

$$f(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{8}-\frac{9}{8}=-1$$

$$f(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=1\frac{1}{8}+\frac{9}{8}=1$$

以上をまとめると、$(x,y)=(1,0),(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ で最大値 1 をとり、$(x,y)=(-1,0),(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ で最小値 -1 を取る。