3.2 大数の法則

ここでは大数の弱法則と強法則を紹介する

3.2.1 大数の弱法則 (The Weak Laws of Large Numbers)

定理 3.2 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立で，分布がすべて同じ確率変数の列とする．今，$EX_1 = m, V(X_1) = \sigma^2 < \infty$ ならば，

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

とおくとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\bigl(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon\bigr) = 0 \tag{3.6}$$

証明　チェビシェフの不等式から

$$P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{E\bigl[|S_n - nm|^2\bigr]}{n^2\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \tag{3.7}$$

$\{X_n\}$ が独立なので，

$$V(S_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[(X_j - m)(X_k - m)] = \sum_{j=1}^{n} V(X_j) = n\sigma^2$$

これを (3.7) に代入して，

$$P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) = P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$n \to \infty$ のとき，右辺は 0 に収束する． □

任意の $\varepsilon > 0$ に対して (3.6) が成り立つとき S_n/n は m に**確率収束**すると言う．大数の弱法則は S_n/n が m に確率収束する事を主張する．独立同分布な確率変数列に対しては定理 3.2 よりも条件を緩やかにして， X_1 が可積分であれば良いことまで知られている．

3.2.2 大数の強法則 (the Strong Law of Large numbers)

大数の弱法則の主張は**相対的な頻度は真の確率に近づいていく**という直観的な主張に比べると間接的であり，もどかしい感じがする．もっと直接にこの主張を数学的に証明することはできないかというのがここでのテーマである．

定義 3.2 期待値 0 の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して**大数の強法則**が成り立つとは,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad a.s. \tag{3.8}$$

が成り立つことを言う. X_n の期待値が 0 でないときは $\tilde{X}_n = X_n - E(X_n)$ に対して大数の強法則が成り立つときに言う. 特に, $EX_n = m$ (一定) のときはこれは

$$\frac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \qquad a.s. \tag{3.9}$$

と同値である.

定理 3.3 (i) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立な確率変数列で, 期待値 0, 分散 $\sigma_n^2 < \infty$ とし, さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \tag{3.10}$$

となるならば, $\{X_n\}$ に対して大数の強法則が成立する.

(ii) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で同分布を持ち, 可積分, $EX_1 = m$ とすると $\{X_n\}$ に対して大数の強法則 (3.9) が成立する.

証明の前に補題を二つ準備する.

補題 3.4 (Kronecker の補題) $\{a_n\}$ を正の数列とし, $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ と置く. $n \to \infty$ のとき $A_n \to \infty$ とする. 数列 $\{x_n\}$ が

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{A_j} \quad \text{は収束する} \tag{3.11}$$

という条件を満たすならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A_n} = 0$$

となる.

補題 3.5 (Kolmogorov の不等式) $n \geq 1$ とする. $\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ は独立な確率変数で,

$$EY_j = 0,\ E(Y_j^2) < \infty, \qquad 1 \leq j \leq n$$

とする. この時, 任意の $\lambda > 0$ と $S_k = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$ に対して

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{ES_n^2}{\lambda^2}$$

さしあたり，この二つの補題を認めて定理 3.3 を証明しよう．
(i) の証明： Kronecker の補題により，確率 1 で $\sum_{n\geq 1} X_n/n$ が収束することを示せばよい．これを言うために，$0 < \gamma < 1/2$ を任意に取り，部分列 $\{n_k\}$ を

$$\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{j^2}{\sigma_j^2} < 2^{-k}$$

となるように定める．これは条件 (3.10) から $\sum_n \sigma_n^2/n^2$ が収束しているので可能．$k \geq 1$ に対して Kolmogorov の不等式により，$Y_j = \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}$ および $n = n_{k+1} - n_k$, $\lambda = 2^{-\gamma k}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{1\leq j\leq n_{k+1}-n_k} |Y_1 + \ldots + Y_j| \geq 2^{-\gamma k}\right) \\
&\leq 2^{2\gamma k} E(Y_1^2 + \ldots + Y_{n_{k+1}-n_k}^2) \\
&= 2^{2\gamma k} \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sigma_p^2}{p^2} < 2^{-(1-2\gamma)k}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

最後の不等式は n_k の決め方から得られる．$\gamma < 1/2$ だったので，(3.12) に Y_j の定義式を代入し， k について加えて

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}| \geq 2^{-\gamma k}\right) < \infty. \qquad (3.13)$$

Borel-Cantelli の第一補題からこのとき

$$P\left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{k=K}^{\infty} \{\max_{1\leq j\leq n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_n k+j}{n_k+j}| \geq 2^{-\gamma k}\}\right) = 0$$

つまり，この補集合の確率が 1 になる．これは確率 1 である K_0 がとれて，$k \geq K_0$ ならば常に

$$\max_{1\leq j\leq n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}| < 2^{-\gamma k}$$

となっているので，$\sum_n X_n/n$ が確率 1 で収束することが分かる．
(ii) $m = 0$ としておいてよい．$\tilde{X}_n$ を

$$\tilde{X}_n := \begin{cases} X_n & |X_n| \leq n \text{ のとき} \\ 0 & \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと，$E|\tilde{X}_n| \le E|X_1| < \infty$ で，$\hat{X}_n = \tilde{X}_n - E\tilde{X}_n$ と期待値を 0 にしておく．このとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\hat{X}_n)^2}{n^2} &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\tilde{X}_n)^2}{n^2} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^2} P(j-1 \le |X_1| \le j) \quad \because \text{同分布} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P(j-1 \le |X_1| \le j) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\le C \sum_{j=1}^{\infty} jP(j-1 \le |X_1| \le j) = CE|X_1| < \infty\end{aligned}$$

なので，(i) から確率 1 で

$$\frac{\hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_n}{n} \to 0$$

ところで X_1 が可積分で $EX_1 = 0$ なので，

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\tilde{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(EX_1 - E(X_1 1_{\{|X_1| \ge j\}}) \right) \to EX_1 = 0$$

となり，上の二つの式から a.s. で

$$\frac{\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_n}{n} \to 0 \tag{3.14}$$

が分かる．最後に，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \ne \tilde{X}_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \ge n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \ge n) \le CE|X_1| < \infty\end{aligned}$$

なので，再び Borel-Cantelli の第一補題により a.s. である番号 N が見つかり， $n \ge N$ ならば $\tilde{X}_n = X_n$ となり，(3.14) より

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0$$

$\square$

補題 3.5 の証明　最初に独立の定義から n 変数と m 変数の有界可測関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ と $g(y_1,\dots,y_m)$ に対して

$$E\left[f(X_1,\dots,X_n)g(X_{n+1},\dots,X_{n+m})\right]=E\left[f(X_1,\dots,X_n)\right]E\left[g(X_{n+1},\dots,X_{n+m})\right]$$

となることに注意する．いま，

$$A=\{\omega\in\Omega;\max_{1\le k\le n}|S_k(\omega)|\ge\lambda\}=\{\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\lambda\}$$

とおくとき

$$ES_n^2\ge E\left[S_n^2 1_A\right].$$

A をさらに分解して

$$A=\bigcup_{k=1}^n\{|S_j|<\lambda \text{ if } j<k,|S_k|\ge\lambda\}=\bigcup_{k=1}^n A_k$$

と書こう．A_k は $X_1,\dots,X_k$ だけで決まるので，$X_{k+1},\dots,X_n$ とは独立なので，

$$E\left[S_n^2 1_{A_k}\right]=E\left[(S_k+(S_n-S_k))^2 1_{A_k}\right]=E\left[S_k^2 1_{A_k}\right]+P(A_k)E(S_n-S_k)^2\ge\lambda^2P(A_k)$$

これを k について足すと

$$E\left[S_n^2 1_A\right]\ge\lambda^2P(A)$$

左辺は $E[S_n^2]$ よりも大きくないので，求める不等式が得られた． $\square$

補題 3.4 の証明　無限和が収束しているので，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $N\ge1$ がとれて $n\ge N,m\ge1$ のとき常に

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+m}\frac{x_j}{A_j}\right|<\varepsilon$$

とできる．このとき

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n x_j\right|&=\left|\sum_{j=1}^N x_j+\sum_{j=N+1}^n A_j\frac{x_j}{A_j}\right|\le\left|\sum_{j=1}^N x_j\right|+\left|\sum_{j=N+1}^n\sum_{p=1}^j a_p\frac{x_j}{A_j}\right|\\&=\left|\sum_{j=1}^N x_j\right|+\left|\sum_{p=1}^n\sum_{j=\max\{p,N+1\}}^n a_p\frac{x_j}{A_j}\right|\le\left|\sum_{j=1}^N x_j\right|+\varepsilon A_n\end{aligned}$$

両辺を A_n で割って $n \to \infty$ として $\varepsilon > 0$ が任意であることより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{A_n} = 0$$

が分かる.