3.3 特性関数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，X をその上で定義された確率変数，μ を X の分布とする．このとき，確率変数 X の（または分布 μ の）**特性関数** $\varphi_X(t)$ を（または $\varphi_\mu(t)$）を

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$
$$(\varphi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mu(dx))$$

によって定義する．二つの定義が同じものであることは X が有限個の値 $a_1, \ldots, a_k$ をとるとき

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu(\{a_j\})\delta_{a_j}$$

とかけるので，

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = E(e^{itX}) &= \sum_{j=1}^{k} e^{ita_j} P(X = a_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} e^{ita_j} \mu(\{a_j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu(\{a_j\}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\delta_{a_j}(dx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mu(dx)
\end{aligned}$$

一般の場合はいつものようにこの式の極限をとることによって正しいことが分かる．

例 3.1 ディラック分布 δ_a の特性関数 $\varphi_{\delta_a}(t)$ は上の計算により e^{ita} となることが分かる．その他の分布について見てみよう．
二項分布　$B(n,p)$ の特性関数 $\varphi(t)$ は，

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left(1 - p + pe^{it}\right)^n = \left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^n
\end{aligned}$$

ポアソン分布　$P(\lambda)$ の特性関数 $\varphi(t)$ は

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{ikt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)}
\end{aligned}$$

次に正規分布の特性関数を求めてみる

標準正規分布 $N(0,1)$ の特性関数 $\varphi_{N(0,1)}(t)$ は

$$\begin{aligned}
\varphi_{N(0,1)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+ixt} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}-\frac{t^2}{2}} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

一般の正規分布 $N(m,\sigma^2)$ の特性関数 $\varphi_{N(m,\sigma^2)}(t)$ は

$$\begin{aligned}
\varphi_{N(m,\sigma^2)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(m+\sigma z)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{imt} \varphi_{N(0,1)}(t\sigma) \\
&= e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}
\end{aligned}$$

分布と特性関数は 1 対 1 に対応している．このことを主張するのが次の Lévy の反転公式である．

定理 3.6 (Lévy の反転公式) μ を分布，F, φ をそれぞれ μ の分布関数，特性関数とする．$a < b$ が F の連続点のとき，

$$\mu([a,b]) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{-A}^{A} \varphi(u) e^{-itu} du dt \tag{3.15}$$

証明は後述する。特性関数を使うと簡単に分かることがいくつかある．

例 3.2 X がポアソン分布 $P(\lambda)$ に従い， Y がポアソン分布 $P(\xi)$ に従い，X と Y は独立とすると，$X+Y$ はポアソン分布 $P(\lambda+\xi)$ に従う．実際，X と Y が独立なので，

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t)=E[e^{it(X+Y)}] &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\xi(e^{it}-1)} \\ &= e^{(\lambda+\xi)(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

Lévy の反転公式の証明 Fubini の定理により，

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\varphi(u)e^{-itu}du &= \int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s-t)u}\mu(ds)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-A}^{A}e^{i(s-t)u}du\mu(ds) \\ &= 2A\mu(\{t\})+\int_{\mathbf{R}\setminus\{t\}}\frac{2\sin\{(s-t)A\}}{(s-t)}\mu(ds)\end{aligned}$$

これを a から b まで dt で積分すると，$\mu(\{t\})>0$ となる t は高々可算個なので，右辺第一項の積分は 0. ふたたび Fubini の定理により

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{-A}^{A}\varphi(u)e^{-itu}dudt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\frac{2\sin\{(s-t)A\}}{(s-t)}dt\mu(ds) \\ &= \int_{-\infty}^{a}\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds) \\ &\quad +\int_a^b\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds) \\ &\quad +\int_b^{\infty}\int_{A(s-b)}^{A(s-a)}\frac{2\sin v}{v}dv\mu(ds)\end{aligned}$$

$s<a$ のとき，$(s-b)A,(s-a)A<0$ なので，$A\to\infty$ のとき，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to 0$$

同様に，$s=a$ のとき，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A}\frac{2\sin v}{v}dv\to\int_0^{\infty}\frac{2\sin v}{v}=\pi$$

$a < s < b$ のときは $s-b < 0 < s-a$ なので，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin v}{v} dv = 2\pi$$

$s = b$ ならば

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \to \int_{-\infty}^{0} \frac{2\sin v}{v} dv = \pi$$

最後に， $s > b$ ならば $s-a, s-b > 0$ なので，

$$\int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \to 0$$

有界収束定理により， a, b が F の連続点であることから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{(s-b)A}^{(s-a)A} \frac{2\sin v}{v} dv \mu(ds) \to \int_{a}^{b} 2\pi\mu(ds) = 2\pi\mu([a,b])$$

□

特性関数と分布が 1 対 1 に対応しているので，特性関数が特性関数に収束するとき，分布についても何らかの収束が分かるはずである．実際には次のような事が分かる．

定理 3.7 $\varphi_n(t), \psi(t)$ がそれぞれ分布 μ_n, ν の特性関数であるとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \psi(t)$$

が成り立つならば，$\nu(\{a,b\}) = 0$ となる任意の実数の組 $a < b$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n([a,b]) = \nu([a,b]) = \nu((a,b))$$

が成り立つ．さらに，この逆もまた正しい．そこで，特性関数が特性関数に収束する事を**分布収束する**という．

証明は省略する．(西尾真紀子著「確率論」第五章 §4,5 参照)

練習問題 3.2 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従い，Y が正規分布 $N(a, v^2)$ に従い，X と Y が独立ならば，$X+Y$ の分布は正規分布 $N(m+a, \sigma^2+v^2)$ となることを確かめよ．

練習問題 3.3 ポアソンの少数の法則を特性関数を用いて証明せよ。つまり、$np_n \to \lambda > 0$ のとき、$B(n, p_n) \to P(\lambda)$ が分布の収束の意味で成り立つことを証明せよ．