1.2　根元事象と (離散）確率空間

Ω を有限集合，その元を ω で書く．Ω を **全事象** と呼ぶ．Ω から $[0,1]$ 区間への関数 (写像）P が

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

を満たすとき，P を Ω 上の**確率**と呼ぶ．確率 P は一般に Ω の部分集合 A に

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$$

によって自然に定義が拡張される．Ω の各要素は考えている問題における起こりうる最小単位の出来事であり，これ以上細かく分解できないものを表しているので**根元事象**と呼ばれている．Ω の部分集合を単に 事象 と呼ぶ.

例 1.7 サイコロを二つ同時に振るとき，起こりうる最小単位の事象とは 1 番目のサイコロの出目 i_1 と 2 番目のサイロの出目 i_2 が指定されてしまった事象で，これが根元事象となる。このような根元事象は 36 個あり，Ω はその全体を集めたものとなる.

$$\Omega = \{(i_1, i_2)\,;\, i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, 6\}.$$

ふつうまともなサイコロを考えれば、これらのどの根元事象が起きる確率も同じであるから

$$P((i_1, i_2)) = \frac{1}{36}$$

となる．このとき例えば事象

$$A = \{(i_1, i_2) \in \Omega\,;\, i_1 + i_2 = 5\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

が起きる確率は

$$P(i_1 + i_2 = 5) = P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

と計算できる.

定義 1.1 有限集合 Ω とその上の確率の組 (Ω, P) を（有限）**確率空間**と呼ぶ.

練習問題 1.1 30 人のクラスの誕生日の組み合わせの根元事象はどのようなものか？一つの根元事象の確率はどのように決めればよいか？更に， 30 人の誕生日がすべて異なる確率を求めよ.

これまでの話は Ω が可算集合であっても全く同じようにできる．以下ではあまり気にしないで Ω は有限または可算集合とする．このとき確率空間 (Ω, P) を**離散確率空間**と呼ぶ．

例 1.8 負けず嫌いの人が勝つまでゲームを続ける．勝ったらそこで終わる．毎回同じゲームを繰り返すものとして， 1 回のゲームでこの人が勝つ確率は 1/2 であるとする．このとき，各ゲームの結果としてこの人が勝つのと負けるのは同じくらい確かなので，k 回このゲームを続けたとすると，勝ち負けの出方の列

勝負勝勝勝負勝勝勝勝勝勝勝負

負負負負負負負負勝勝負負負負

などは同じ確からしさで起きると考えてよい．この様な勝ち，負けの長さ k の列は全部で 2^k 個ある．このうち，第 k 回目に初めてこの人が勝つということは負けが最初の $k-1$ 回続き，最後が勝ちという一通りの並べ方だけだから，求める確率は 2^{-k} となる．

この時，この人はいつまで経ってもなかなか勝てないという可能性もあるので，根元事象は

$$\omega_k = \{\text{ この人が } k \text{ 回目で初めて勝つ }\} \quad k = 1, 2, \ldots$$

ととることになるので， Ω は可算集合になる．念のためだが

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$$

となっている[1]．

[1]等比数列の和の公式により，

$$a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

ここで $a = 1/2$ とおき，$n \to \infty$ とするとよい．

1.2.1　(離散) 確率変数

定義 1.2 (Ω, P) を離散確率空間とする．このとき Ω 上定義された実数値関数を **(離散) 確率変数**と呼ぶ.

例 1.9 さいころを 1 回投げる確率空間を考える．根元事象は

$$\omega_k = \{\text{ サイコロの出た目の数は } k\} \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

で，全部で 6 個ある[2]．確率としては偏りのないサイコロを扱うものとして

$$P(\omega_k) = 1/6 \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

としておこう．このとき例えば

$$X_1(\omega_k) = \sin k, \quad X_2(\omega_k) = k^2, \quad X_3(\omega_k) = k \mod 2$$

などはすべて確率変数になる.

練習問題 1.2 偏りのないサイコロを 2 回投げる．このときの根元事象はどのようなものか．その確率を求めよ．更に，この確率空間で確率変数を 10 個作れ.

簡単なようだが，これまでで既にかなり難しい問題を考えることができることは既に高等学校の数学や入試問題などを経験してきた皆さんには分かっているものと思う．有限と言ってもサイコロを n 回振ったときの根元事象の全体も 6^n 個で有限であり，すでに難しい問題がいくらでも考えられる[3].

だが、我々はさしあたりこの様な組み合わせの難しい問題はあまり考えないで話を進めていこう.

1.2.2　離散確率変数の分布

定義 1.3 (Ω, P) を離散確率空間とし，X をその上の確率変数とする．X は Ω から実数への写像だから，Ω が可算集合（たかだか可算無限個の要素から

[2] わざわざ根元事象と出た目の数を区別する必要がないことも多く，根元事象を $1, 2, \ldots, 6$ としても数学的には全く構わない

[3] 例えば毎回偶数の目が出たら 1 円受け取り，奇数の目が出たら 1 円払うものとしたとき，最初 所持金 0 でこのゲームを始めたとき，n 回目にちょうど所持金が 0 である確率はいくらか？ 払う金額が 2 円になったときはこの確率はどうなるか？

なる集合）で，したがって X のとりうる値もたかだか可算無限個しかない．これらの値を並べて

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

と書くことにする．このとき，

$$P(X = a_j) \qquad j = 1, 2, \ldots$$

は X のとりうる値の集合 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ 上に新しい確率

$$p_X(a_j) = P(X = a_j) \qquad j = 1, 2, \ldots$$

を決める．この新しい X から決まる確率 p_X を X の**分布**と呼ぶ．このとき，
「確率変数 X は分布 p_X にしたがう」あるいは
「確率変数 X は分布 p_X を持つ」などという．

分布 p_X は実数上の確率と見ることができるが，いまは単に X の地域 $\{a \in \mathbb{R}; \exists \omega_k \in \Omega, \text{ such that } \ X(\omega_k) = a\}$ の上の確率であることを注意しておく

練習問題 1.3 例 1.9 の確率変数 X_1, X_2, X_3 のそれぞれについてその分布を求めよ．