1.3 分布の例

この節ではいろいろな離散確率変数から決まる（離散）分布を紹介する．

1.3.1 2 項分布 $B(n,p)$

n は自然数で，$0 \leq p \leq 1$ である．全事象 Ω は $n+1$ 点集合で、通常

$$\Omega = \{0,1,2,\dots,n\}$$

と表す．この上の 2 項分布 $B(n,p)$ を μ で書くとき，μ は次の式で与えられる[1]

$$\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,\dots,n.$$

2 項定理は

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

を保証しているので，$a=p, b=1-p$ として 2 項定理を (逆向きに）使うと

$$\sum_{k=0}^{n} \mu(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

となり，確かに μ は $\{0,1,\dots,n\}$ の上の確率になっている．

1.3.2 幾何分布 $G(p)$

この分布は可算無限集合 $\mathbb{N}_{\geq 0} = \{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ 上の確率で，同じ成功の確率 p の独立な試行を続けて，初めて成功するまでに失敗した回数の分布を表している．前にも計算したが，$\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上の 幾何分布 $G(p)$ を μ と書くと，

$$\mu(k) = (1-p)^k p \qquad k = 0,1,\dots,n,\dots$$

[1] これは成功の確率 p の試行を独立に n 回つづけたとき，成功の回数を表す分布として知られている

で与えられる．幾何分布はもっとも計算がしやすい分布として知られている．実際，前にも見たように

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p = p\lim_{N\to\infty}\frac{1-(1-p)^N}{1-(1-p)} = 1$$

なので，μ は $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上の確率である．

1.3.3 ポアソン分布 $P(\lambda)$

パラメータ λ のポアソン分布は最初の講義でもいくつか出てきた．ここで，この分布は $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上で定義され，μ と書くと

$$\mu(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

で与えられる．例 1.2 – 1.4 で λ の値をそれぞれどうとると理論値が得られるか見てみるとよい．

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開が

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

であることから，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{\lambda}e^{-\lambda} = 1$$

となり，これも $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上の確率である．

1.3.4 負の 2 項分布 $NB(n, p)$

この分布は $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上で定義されこれを μ とかくと $n \geq 1, 0 < p < 1$ のとき

$$\mu(k) = \binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

となっている．$\binom{n+k-1}{k}$ は $f(x) = (1-x)^{-n}$ の原点におけるテイラー展開の x^k の係数．

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k.$$

これは n 回目の成功までに失敗する回数の分布になっている[2]．上の式を k について加えると

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k=p^n(1-(1-p))^{-n}=1$$

となり，確かに μ は $\mathbb{N}_{\geq 0}$ 上の確率.

1.3.5 n 個の点の上の一様分布 Unif $\{1,2,\dots,n\}$

根元事象は n 個の点 $\omega_1,\dots,\omega_n$ のどれかで，$\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ となる．簡単のため $\Omega=\{1,2,\dots,n\}$ としておく．この上の一様分布は

$$\mu(\omega_k)=\frac{1}{n}\qquad k=1,2,\dots,n$$

で与えられる．明らかに

$$\sum_{k=0}^{n}\mu(k)=1$$

であるので，これも確率になっている．

[2]想像がつくかもしれないが，負の 2 校分布は $G(p)$ にしたがう独立な確率変数 $X_1,X_2,\dots,X_n$ の和を $Y=X_1+\dots X_n$ とすると，Y の分布が負の 2 項分布 $NB(n,p)$ となることが知られている

練習問題 1.4 μ_n が 2 項分布 $B(n, \frac{c}{n})$ ならば $n \to \infty$ のとき,

$$\mu_n(k) \to \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

となることを証明せよ[3]. n とともに確率がだんだん小さくなっている時, 平均的には n 回中 c 回起こるような出来事の確率は $n \to \infty$ のときパラメータ c のポアソン分布に近づいていく. これは**ポアソンの少数の法則**と呼ばれる定理の簡単な場合にあたる.

ポアソン分布が起こりにくい事の起こり方を表していると言われる由縁でもある.

練習問題 1.5 ここにあげた以外の分布を知っていれば, その名前をあげよ. できればその分布について知っていることを何でもいいから説明せよ.

[3]次の式を使ってもよい

$$(1 - \frac{c}{n})^n \to e^{-c}$$