2.2　確率空間と実数値確率変数

前節の分布を持つ確率変数は任意の区間 $[a,b]$ の中に値をとる確率が正である．この意味で連続的な値をとり，従って確率空間の全事象 Ω も大きくなる.（連続無限個の元を持つ）そこでどうしても**可測性**の議論が必要になる．簡単に定義しておく．

定義 2.2 Ω を（空でない）集合とする．Ω の部分集合の集まり $\mathcal{F}$ が次の条件を満たすとき σ-**加法族**という．

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

定義 2.3 集合 Ω とその σ-加法族 $\mathcal{F}$ が与えられたとき，$\mathcal{F}$ 上定義された関数 (集合関数という）P が次の条件を満たすとき，**確率測度**と言う．

(i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$.

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が互いに排反[1]ならば，

$$P(\cup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} P(A_i).$$

組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を決めることを確率空間を与えると言う．

以下では Ω は十分大きいものとして確率空間が与えられたものとして話をする．確率の基本的な性質として，次は**確率の連続性**としてよく知られている．

定理 2.1 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ は　$\mathcal{F}$ の元の列とする．

(i) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ならば

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

[1]つまり $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$ （同時には起こらない）

(ii) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ ならば

$$\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

証明　これは確率 P の 2 番目の性質による．$\{A_i\}$ に対して集合列 A'_i を

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 \setminus A_2 \\ A'_2 &= A_2 \setminus A_3 \\ &\cdots \\ A'_i &= A_i \setminus A_{i+1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

とおく．

$$A_1 = A'_1 \cup A_2 = A'_1 \cup A'_2 \cup A_3 = \ldots = \cup_{i\geq 1} A'_i \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

である．$i < j$ とするとき，

$$A'_i \cap A'_j = A_i \cap A^c_{i+1} \cap A'_j \subset A^c_{i+1} \cap A_j \subset A^c_{i+1} \cap A_{i+1} = \emptyset$$

となり，A'_i 達は互いに排反である．したがって

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A'_i) + P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$$

左辺は有限 (1 以下) なので，右辺の無限和は収束する．従って，任意の $\varepsilon > 0$ に対して N を十分大きくとると

$$\sum_{i\geq N} P(A'_i) < \varepsilon$$

となる．

$$P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) < P(A_N) = \sum_{i=N}^{\infty} P(A'_i) + P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) < \varepsilon + P(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$$

となり，

$$\lim_{N\to\infty} P(A_N) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

が言えた．

後半は $B_i = A_i^c$ と置くとこれは単調に減少するので、

$$\lim_{N\to\infty} P(B_N) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

が前半から言えて，

$$P(B_N) = 1 - P(A_N), \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$$

だから分かる．　□

補題 2.2 (Borel-Cantelli の第 1 補題)

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$$

を満たすならば，

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = 0$$

最後の確率の中の集合は $\{A_i\}_{i\geq 1}$ の上極限集合と呼ばれ $\limsup_{i\to\infty} A_i$ と書かれる．$\omega \in \limsup_{i\to\infty} A_i$ ならば ω は無限個の A_i に含まれている．

補題の証明

$$P(\bigcup_{j=N}^{\infty} A_n) \leq \sum_{j=N}^{\infty} P(A_n)$$

である．右辺は仮定から $N \to \infty$ のとき 0 に行く．一方，左辺の事象は単調に減少しているので定理 2.1 により左辺は

$$P(\bigcap_{N\to\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty} A_n)$$

に近づく．　□

最後に実数値確率変数を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義しよう．

定義 2.4 Ω 上定義された実数値関数が**確率変数**であるとは，

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

となるときに言う．

注意 2.3 (Borel σ-加法族) $\mathbb{R}$ の部分集合の σ-加法族 $\mathcal{B}$ がすべての開集合を含むような最小の σ-加法族のとき，Borel σ-加法族と呼ばれる．(2.3) の条件は次の条件と同値であることが知られている．

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$

たくさんの確率変数を同じ確率空間の上で考えることができる．確率変数については次のような基本的な性質が知られている．

定理 2.4 (i) X, Y が確率変数で，$a, b \in \mathbb{R}$ ならば，XY，$aX + bY$ も確率変数．

(ii) $X_1, X_2, \ldots$ が確率変数ならば $\sup_n X_n, \inf_n X_n$ も確率変数．

(iii) X_n が確率変数で任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$X_\infty(\omega) = \lim_{n \to \infty} X(\omega)$$

が存在するならば，X_∞ も確率変数．

練習問題 2.3 二つの集合 A, B が等しい事を示すには $A \supset B$ かつ $A \subset B$ を言う．$A \subset B$ を示すには，A の勝手な要素 $\omega \in A$ が $\omega \in B$ を満たすことを言う．

$A \subset \Omega$ のとき，

$$A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$$

と定義するとき，

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

を証明してみよ．

練習問題 2.4 Ω の部分集合の集合族 $\mathcal{A}$ が *algebra* であるとは，

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$.

となるときに言う．$\mathcal{A}$ が *algebra* のとき，次を示せ．

$$A, B \in \mathcal{A} \ \text{ならば}\ A \cap B \in \mathcal{A}$$