## 2.3　確率変数の期待値

離散的な場合には簡単に定義できた期待値だが，確率変数が連続的な値をとる場合の期待値も含めて一般に定義をしておく．

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$X$ をこの上で定義された確率変数とする．

$X$ がたかだか有限個の値 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ しか取らないときは今までの定義をそのまま使う．

$$EX = \sum_{j=1}^{m} a_j P(X = a_j)$$

$X$ が連続な値を取るときは，上の定義をうまく使いながら期待値を定義したい．

**Case 1.** $X \geq 0$ **のとき**

$n \geq 1$ に対し，新しい確率変数 $X_n$ を

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{if } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1 \\ 0 & \text{if } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

と定義する．作り方から $X_n \nearrow X$ で，$X_n$ はたかだか有限個の値しか取らない．そこで

$$EX = \lim_{n \to \infty} EX_n$$

と定義する．

$$EX_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right).$$

もともと $X \geq 0$ が有限個の値 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ しか取らないとき，$n$ が十分大きければ $a_j$ 達は $\frac{k}{2^n}$ と $\frac{k+1}{2^n}$ の間にはたかだか一つしか無いようにできる．このとき，$\frac{k}{2^n} \leq a_j < \frac{k+1}{2^n}$ となる $a_j$ がある時は

$$\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n} \quad \Longleftrightarrow X = a_j$$

だから

$$P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) = P(X = a_j)$$

この様な $a_j$ がない $k$ では

$$\left\{\omega \in \Omega; \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \emptyset$$

となるので，$k$ について加えると，このとき

$$EX_n = \sum_{j=1}^{m} \frac{[2^n a_j]}{2^n} P(X = a_j)$$

となる．ただし $[x]$ はガウスの記号で $x$ を越えない最大の整数を表す．$n \to \infty$ のときこの値は

$$\sum_{j=1}^{m} a_j P(X = a_j)$$

に近づく．従って，$X \geq 0$ で、$X$ が有限個の値しか取らないとき，この定義は元の定義の拡張になっている．

**Case 2. 一般の場合**

$X$ が一般の確率変数のとき，

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$$

とおくと $X^+, X^-$ は非負の確率変数で

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$$

なので，$EX^+, EX^-$ がともに有限ならば $X$ は**可積分**と言い，

$$EX = EX^+ - EX^-$$

と定める．$X$ が有限個の値しか取らないとき，これが最初の定義と同じものを与えることはもう明らかだろう．

**注意 2.5** ルベーグ積分を知っている人は，期待値の定義が積分の定義に似ていることに気がついたかもしれない．実際その通りで，以下に述べるようなルベーグ積分の諸定理がそのまま成り立つことが知られている．証明のやり方もほとんど同じである．$X$ の分布が密度関数 $f(x)$ をもつ場合にこの定義から

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

となることも同時に分かる．

**定理 2.6** 期待値 $EX$ は次を満たす．

(1) $X, Y$ が可積分確率変数で，$a, b \in \mathbb{R}$ ならば

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

(2) $X \geq 0$ なら $EX \geq 0$.

(3) ( 単調収束定理) $X_n \geq 0$ が $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \ldots \leq X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$ を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX_\infty$$

(4) (Fatou の補題) $X_n \geq 0$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} EX_n \geq E\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right)$$

(5) (Lebesgue の収束定理) $X_n \to X_\infty$ が確率 1 で成り立ち，ある可積分確率変数 $Z \geq 0$ に対して $P(|X| \leq Z) = 1$ となるとき

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX_\infty$$

この定理の証明は省略する．ルベーグ積分または確率論の教科書には載っている．

**定理 2.7** ( チェビシェフ [Chebyshev] の不等式 )
$f(x)$ が非負単調非減少なとき，確率変数 $X$ について $f(X)$ が可積分ならば，

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)} \tag{2.3}$$

が任意の $f(\lambda) > 0$ となる $\lambda$ に対して成立する．

**証明** $X(\omega) > \lambda$ のとき，$f(X(\omega)) > f(\lambda) > 0$ なので，

$$\frac{f(X(\omega))}{f(\lambda)} \geq 1$$

であり，この期待値を $\{X \geq \lambda\}$ 上で取ることにより，

$$E\big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}\big] \geq E\big[\frac{f(X)}{f(\lambda)}; X \geq \lambda\big] \geq P(X \geq \lambda)$$

最初の不等式は $f$ が非負なことから出る．期待値の線形性からこの式は (2.3) と同じ． □

よく使うのは $f(x) = x^p 1_{[0,\infty)}(x)$ に対して

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{Ef(|X|)}{f(\lambda)} = \frac{E(|X|^p)}{\lambda^p}$$

という形の不等式である．

**練習問題 2.5** $X$ を 2 乗可積分とし，$EX = m$ とするとき，

$$P(X \geq m + a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

を証明せよ．

**ヒント** $Y = X - m$ について *Chebyshev* の不等式を使う．