定理 2.8 （Hö1der の不等式） $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし，$|X|^p, |Y|^q$ がともに可積分とするとき，

$$|E[XY]| \leq (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}(E[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

とくに $p = 2$ のとき $q = 2$ となり、この式は Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれている。

証明は，ルベーグ積分の本に書いてあるのと同じなので省略する．

2.4 分布関数

分布というものはまだ関数に比べて分かりにくいような気がする．そこで，関数の言葉で分布を語ることを考える．

定義 2.5 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数 X に対してその分布関数 $F_X(t)$ を

$$F_X(t) := \mu_X((-\infty, t]) = P(X \leq t) \tag{2.4}$$

によって定義する．

命題 2.9 確率変数 X の分布関数 $F_X(t)$ は以下の性質を持つ．

(i) $F_X(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ について単調非減少．

(ii) $F_X(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ について右連続．

(iii) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$

証明 (i) $s < t$ のとき $F_X(s) \leq F_X(t)$ を言えばよい．明らかに，$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq s\} \subset \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq t\}$ だから，

$$F_X(s) = P(X \leq s) \leq P(X \leq t) = F_X(t)$$

(ii) $t_n \searrow t$ のとき $F_X(t_n) \to F_X(t)$ を言えばよい．このとき $X^{-1}((-\infty, t_n]) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq t_n\}$ は n について単調に減少して，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, t_n]) = X^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, t_n]) = X^{-1}((-\infty, t])$$

なので，確率の連続性から

$$F_X(t) = P(X \le t) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le t_n\}) = \lim_{n\to\infty} P(X \le t_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(t_n)$$

(iii) 上と同じように考えると，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} F_X(t) &= P(\cap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, -n])) = P(X^{-1}(\emptyset)) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} F_X(t) &= P(\cup_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, n])) = P(X^{-1}(\mathbf{R})) = 1 \end{aligned}$$

例 2.1 $\mu(\{0\}) = 1$ のとき，$\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \ni 0$ という分布が得られる．この μ を δ_0 とかき，$\{0\}$ に集中する質量をもつ**ディラック**（Dirac）**分布**という．この分布関数は

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$$

となる．

例 2.2 サイコロの目の分布は

$$\mu(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

で与えられる．この分布関数を求めてみよう。$t < 1$ のとき、

$$F(t) = \mu((-\infty, t]) = P(\text{ 目の数が } t \text{ 以下}) = 0$$

$1 \le t < 2$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$2 \le t < 3$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$$

$3 \le t < 4$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$$

$4 \le t < 5$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{2}{3}$$

$5 \leq t < 6$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1,2,3,4,5,6\}) = \mu(\{1,2,3,4,5\}) = \frac{5}{6}$$

$6 \leq t$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1,2,3,4,5,6\}) = \mu(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$$

つまり、 $F(x)$ は $i = 1,2,3,4,5,6$ の各点で $\frac{1}{6}$ ずつジャンプする右連続な階段関数になる。

これは次のようにも考えられる．サイコロの目の分布は 1 から 6 までの 6 個の自然数に $\frac{1}{6}$ ずつの重みを持つ分布であるから，この分布を μ とすると

$$\mu(A) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\delta_{\{i\}}(A)$$

と書くことができる．ただし，$\delta_{\{i\}}$ は i に集中する重みを持つディラック分布．これより分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\delta_{\{i\}}((-\infty, t]) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}F_i(t)$$

ただし，$F_i(t)$ は ディラック分布 $\delta_{\{i\}}$ の分布関数で，$t = i$ で 0 から 1 へジャンプする．この関数 $F(t)$ が上のような形であることは明らかだろう．

例 2.3 $a > 0$ に対して μ が次で与えられるとき，パラメータ a の**コーシー** (Cauchy) **分布**という．$A \in \mathcal{B}$ のとき，

$$\mu(A) = \frac{a}{\pi}\int_A \frac{1}{a^2 + x^2}dx$$

この分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\big[\mathrm{Arctan}\frac{t}{a} + \frac{\pi}{2}\big]$$

例 2.4 標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}dx$$

となる．これ以上簡単な形にはならない．ときに右辺は $\Phi(t)$ とか $N(t)$ などと書かれる事がある．

例 2.5 パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布の分布関数は

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

である.

練習問題 2.6 次の分布の分布関数を求めよ.

(i) 区間 $[a,b]$ 上の**一様分布**は

$$\mu(A) = \frac{1}{b-a} \int_{A \cap [a,b]} dx$$

である.

(ii) 2 項分布 $B(3, 0.5)$.

(iii) パラメータ 1 のポアソン分布

補遺　実は命題 2.9 の逆が言える．つまり，右連続な単調非減少関数 F が

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1$$

を満たすとき，ある $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率 μ_F が唯一つ存在して

$$\mu_F((-\infty, t]) = F(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

が成り立つことが知られている．すこし説明しよう．

言葉の準備がいる．いつものように Ω を勝手な集合 $(\neq \emptyset)$ とするとき，Ω の部分集合の族 $\mathcal{A}$ が Ω の加法族であるとは，

(i)　$\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii)　$A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$

(iii)　$A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$

の 3 つが成り立つときに言う．Ω の σ-加法族は Ω の加法族になるが，逆は正しくない．

例 2.6

$$\mathcal{C} := \{(a, b]; -\infty \le a < b < \infty\} \cup \{\mathbf{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

とし，

$$\mathcal{A} := \{A_1 \cup \ldots \cup A_n; \{A_j\}_{j=1}^n \text{ は排反 }, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}\}$$

は $\mathbf{R}$ の加法族である．$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a]; a \in \mathbf{R}\}$ を含む最小の σ-加法族であることが知られており，また $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ も知られている[1]．だから，$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ となるが，$\mathcal{C}$ 自身には $\cup_{n=1}^\infty (2n, 2n+1]$ というボレル集合は含まれていない．

定理 2.10 (**カラテオドリの拡張定理**[2])
Ω の加法族 $\mathcal{A}$ 上で定義された集合関数 Q が次の条件を満たすものとする．

(i)　$0 \le Q(A) \le 1\ \forall A \in \mathcal{A}, \quad Q(\Omega) = 1$

(ii)　$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ が排反ならば

$$Q(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n Q(A_k)$$

(iii)　$\{A_n\} \in \mathcal{A}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ かつ $\cap_{n\ge1} A_n = \emptyset$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} Q(A_n) = 0$$

このとき，$\sigma(\mathcal{A})$ 上に唯一つの確率 Q^* がとれて，

$$Q^*(A) = Q(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{2.5}$$

が成り立つ．

F から 例 2.6 の $\mathcal{A}$ 上に Q を作ってみる．$A = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \ldots \cup [a_n, b_n) \in \mathcal{A}$ とする．$[a_i, b_i)$ たちは排反である．このとき，

$$Q(A) := \sum_{i=1}^n \big[F(b_i) - F(a_i)\big]$$

---

[1]証明は難しくはないので，気になる人は証明をしてみるとよい．

[2]証明については，西尾真喜子著「確率論」2 章 §3 参照

と定める．$Q(\mathbf{R})=1, Q(\emptyset)=0$ である．上の条件 (i), (ii) はすぐに分かる．(iii) が面倒だが，対偶を示す．$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ を $\mathcal{A}$ の要素で

$$\lim_{n\to\infty} Q(A_n) = \alpha > 0$$

として $\cap A_n \neq \emptyset$ をいう．

各 n について，

$$A_n = (a_1, b_1] \cup \ldots \cup (a_k, b_k] \quad \text{各区間は排反}$$

の形に書ける[3]．作り方から

$$Q(A_n) = \sum_{i=1}^{k} \bigl(F(b_i) - F(a_i)\bigr)$$

で， F の右連続性から，各 i について $a_i < a'_i < b_i$ となる a'_i を十分 a_i に近づけると

$$F(a'_i) - F(a_i) < \frac{1}{k} 2^{-n-1}\alpha$$

とできる．このとき，$A'_n = (a'_1, b_1] \cup \ldots \cup (a'_k, b_k]$ とおくと，これは排反な区間の和で，$Q(A_n \setminus A'_n) \leq 2^{-n-1}\alpha$ となっている．これから

$$\begin{aligned}
Q(A'_1 \cap \ldots \cap A'_n) &= Q(A_n \setminus \{(A_1 \setminus A'_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A'_n)\}) \\
&\geq Q(A_n) - \sum_{i=1}^{n} Q(A_i \setminus A'_i) \\
&\geq (1 - 2^{-2} - 2^{-3} - \ldots 2^{-n-1})\alpha \geq \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

何が言いたいかというと、これは $A'_1 \cap \ldots \cap A'_n \neq \emptyset$ を意味している。A'_n の各半開区間 $(a'_i, b_i]$ を $[a'_i, b_i]$ としたものを A^*_n と書く．$A^*_n \supset A'_n$ だから $A^*_1 \cap \ldots \cap A^*_n$ も空集合でない．しかもこの集合は A_1 に含まれる閉集合なのでコンパクト性から

$$A^*_1 \cap A^*_2 \cap \ldots \neq \emptyset \tag{2.6}$$

これは $\cap A_n$ に含まれるので， $\cap A_n \neq \emptyset$.

---

[3]正確にはこれらの半開区間は n ごとに違っていると考える方が自然なので，$a_1 = a_1^{(n)}, b_1 = b_1^{(n)}, \ldots, k = k(n)$ などと書くべきだが，記号が繁雑になるので，このように書いておこう．