微分積分学２ 期末試験問題 130122 の解答例

1. つぎの不定積分を計算せよ。(5×4)

$$(1) \int \frac{4}{x^2-4}\,dx \quad (2) \int \frac{x^2+3}{x^2+4}\,dx \quad (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$$
$$(4) \int \sqrt{x^2+7}\,dx \quad (5) \int \frac{dx}{x(1+\log x)}$$

解答　(1)
$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$
だから,
$$\int \frac{4}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) = \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

(2)
$$\int \frac{x^2+3}{x^2+4}dx = x - \int \frac{1}{x^2+4}$$
$$= x - \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{x}{2} + C.$$

(3)　$t = \sqrt{x+9}$ とおくと $x = t^2-9$, $dx = 2tdt$ だから
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = \int \frac{2dt}{t^2-9}$$
$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C.$$

(4)

$$\int \sqrt{x^2+7}dx = x\sqrt{x^2+7} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+7}}\,dx$$
$$= x\sqrt{x^2+7} - \int \sqrt{x^2+7}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+7} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}\right)$$

ここで $t = x + \sqrt{x^2+7}$ とおくと

$$x = \frac{t^2-7}{2t},\ dx = \frac{t^2+7}{2t^2}\,dt,\ \sqrt{x^2+7} = t - x = \frac{x^2+7}{2t}$$

だから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+7}\right| + C$$

となり，

$$\int \sqrt{x^2+7}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+7} + \log\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right) + C.$$

2. 次の定積分を計算せよ (5×4)

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\frac{x}{3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\sin x\,dx$

解答 (1)

$$\int_1^3 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^3 = 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}.$$

(2) $t = x/3$ とおくと $x = 3t,\ dx = 3dt$ だから

$$\int_0^\pi \sin\frac{x}{3}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sin t\,3dt = 3\left[-\cos t\right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{2}.$$

(3) $x = \sqrt{8}\sin t$ とおくと $x : 0 \to 2$ のとき $t : 0 \to \pi/4$ で $dx = \sqrt{8}\cos t dt$ だから,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}.$$

(4)

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}x\,dx = [x\mathrm{Arctan}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log|1+x^2|\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

(5) $t = \cos x$ とおくと $0 \to \pi/4$ のとき $t : 1 \to 1/\sqrt{2}$ で $dt = -\sin x dx$ だから

$$\int_0^{\pi/4} \cos^3 x \sin x\,dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}} t^3\,dt = -\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

3. 次の重積分を計算せよ (4×5)

(a) $\displaystyle\int_D (3-x-y)\ dxdy \qquad D = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

(b) $\displaystyle\int_D (x-y)\ dxdy \qquad D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

(c) $\displaystyle\int_D ye^{y^3}\,dxdy \qquad D = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$

(d) $\displaystyle\int_D xy\,dxdy \qquad D = \{x \ge 0, y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 4\}$

解答 (1)

$$\int_D (3-x-y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (3-x-y)dy \right) dx$$
$$= \int_0^2 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx$$
$$= \int_0^2 \left(3 - x - \frac{1}{2} \right) dx$$
$$= \left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 3.$$

(2)

$$\int_D (x-y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x-y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{3}{20}.$$

(3) この問題では積分の順序が大切． x について先に積分することを考える．

$$D = \{0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1\} = \{0 \le y \le 1,\, 0 \le x \le y\}$$

と書き直して，

$$\int_D ye^{y^3}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y dx \right) ye^{y^3}\,dy$$
$$= \int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy$$

$t = y^3$ とおくと $y : 0 \to 1$ のとき $t : 0 \to 1$ で $3y^2dy = dt$ だから，

$$\int_D ye^{y^3}\,dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3}(e-1).$$

(4)　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換する．ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

で，D に対応する (r,θ) の領域は

$$\{(r,\theta)\,;\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le r \le 2\}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \int_D xy\,dxdy &= \int_{\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\,0\le r\le 2\}} r^2\cos\theta\sin\theta \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta \\ &= \int_0^2 r^3\,dr \int_0^{|pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= 4\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2. \end{aligned}$$

4. 次の立体の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．(2×10)

(a) $V = \{(x,y,z)\,;\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2,\, 0 \le z \le x^2\}$

(b) $V = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 \le a^2,\, 0 \le z \le y\}$

解答　体積は考えている領域の上で 1 を積分する．

(1)

$$\begin{aligned} |V| &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{x^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2\,dx \int_0^2 dy = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
|V| &= \int_{\{x^2+y^2\le a^2,\,0\le z\le y\}} dxdydz \\
&= \int_{\{y\ge 0, x^2+y^2\le a^2\}} ydxdy \\
&= \int_0^a \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta d\theta \right) dr \\
&= \frac{2a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

5. 次の曲線の長さ，および曲面の指定された領域の曲面積を求めよ．

   (a) 曲線 C が $r = 2^\theta,\ 0 \le \theta \le 1$ で表されるとき，この曲線 C の長さ L を求めよ． (1×10)

解答　θ によるパラメータ表示で求める曲線の長さは

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

で与えられる．$x = r\cos\theta = 2^\theta \cos\theta, y = r\sin\theta = 2^\theta \sin\theta$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(\theta)}{d\theta} &= 2^\theta (\log 2 \cos\theta - \sin\theta) \\
\frac{dy(\theta)}{d\theta} &= 2^\theta (\log 2 \sin\theta + \cos\theta)
\end{aligned}
$$

なので，

$$\left(\frac{dx(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy(\theta)}{d\theta}\right)^2 = 2^{2\theta} \left((\log 2)^2 + 1\right)$$

となり，

$$L = \int_0^1 \sqrt{2^{2\theta}((\log 2)^2 + 1)}d\theta$$
$$= \sqrt{(\log 2)^2 + 1}\int_0^1 2^\theta d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{(\log 2)^2 + 1}}{\log 2}.$$

(b) 曲面 $z = xy$ の，円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ の内部にある部分の曲面積を求めよ．(1×10)

解答　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\quad (0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$ とパラメータ表示すると，

$$z = xy = r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{r^2}{2}\sin 2\theta$$

だから，求める曲面積は

$$|S| = \int_{\{0\le r\le a,\,0\le\theta\le 2\pi\}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}\right)^2}drd\theta$$

とかける．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta \end{vmatrix} = r^2(\sin\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta\cos\theta) = -r^2\sin\theta,$$
$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\cos\theta,$$

より

$$K(r,\theta) = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}\right)^2$$
$$= r^2 + r^4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2(1 + r^2).$$

したがって求める曲面積は

$$
\begin{aligned}
|S| &= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) r\sqrt{1+r^2}dr \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[(1+r^2)^{3/2} \right]_0^a \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[(1+a^2)^{3/2} - 1 \right].
\end{aligned}
$$