

## 第 3 章 積分法

### 3.1 定積分と不定積分

関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で定義されている時、区間  $[a, b]$  上の  $f(x)$  の定積分  $\int_a^b f(x)dx$  は

直線  $x = a, x = b$  の間で  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸 ( $\{y = 0\}$ ) とで囲む符合つき面積

として直感的に理解できる。(教科書 p.77 の図参照) とくに、定数  $c$  の定積分は

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

積分に現れる変数  $x$  はダミー変数である<sup>1</sup>。

注意 3.1 定積分はどんな関数に対してもあるという訳ではない。定積分があるとき  $f(x)$  は  $[a, b]$  上リーマン積分可能 という。

詳しい事はあとでもう一度厳密な議論を紹介するが、 $f(x)$  が  $[a, b]$  上リーマン積分可能なときには  $\int_a^b f(x)dx$  は次のような極限としても得る事ができる<sup>2</sup>。

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  と、区間  $[a, b]$  の中に  $n$  個の点をとる、この点列  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  を  $[a, b]$  の分割と呼び、それぞれの  $x_i$  をその分点と呼ぶ。分割は  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  と書く事もある。

この分割  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  に対して、それぞれの小さな区間  $[x_i, x_{i+1}]$  から任意に点  $\xi_i$  を選んでくる。この分割の最大幅：

$$|\Delta| = \max\{|x_{i+1} - x_i|; 0 \leq i \leq n - 1\}$$

<sup>1</sup>積分をしてしまうと変数としては残らない。したがって  $x$  を使おうが  $y$  を使おうが  $t$  を使おうが全く構わない

<sup>2</sup>この事実はすでに知っているとも言えるが、こう表現しておく事が役に立つ時が時々あるので覚えておくとよい。

が 0 に近づくように  $n \rightarrow \infty$  として分点  $\{x_i\}$  を増やして行く時、極限で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

がなりたつ。(教科書 p.79 の図を参照)

以下、関数  $f(x)$  は考えている区間またはそれを含む区間でリーマン積分可能とする。いちいちそのことは断らない事にする。

定理 3.1  $a > b$  のとき  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , および  $\int_a^a f(x)dx = 0$  と約束する事になると、任意の  $a, b, c$  に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

が成り立つ。(定積分の加法性)

$a < c < b$  のときが普通で、これは定積分の定義から出てくるが、後でもう一度厳密に議論する事になる。

練習 3.1 (教科書 p.80 問 3.1)  $a < c < b$  のときはこの加法性が成り立っているとして、一般の  $a, b, c$  に対して定理 3.1 を確かめよ。

定積分の上端を変数  $x$  で置き換えた関数

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

を  $f(x)$  の不定積分 という。

定理 3.2 関数  $f(x)$  が  $c$  を含む开区間  $I$  で連続ならば

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(u)du = f(x) \quad (x \in I)$$

与えられた関数  $f(x)$  に対して、関数  $F(x)$  が 原始関数 であるとは  $F'(x) = f(x)$  となることをいう。

関数  $f(x)$  の二つの原始関数は定数しか違いが無い。つまり、 $F(x), G(x)$  を  $f(x)$  の原始関数とすると、 $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  となる。平均値の定理により、このとき

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (F'(c) - G'(c))(x - a) = F(a) - G(a).$$

( $c$  は  $a$  と  $x$  の間に見つかる)

定理 3.3 (微分積分学の基本定理)  $f(x)$  が連続で、 $F(x)$  がその原始関数 (の一つ) ならば

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

証明  $G(x) = \int_a^x f(u)du$  は定理 3.2 より  $f(x)$  の原始関数になっていて、したがって上の事から

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(u)du + C$$

となる定数  $C$  がとれる。これで  $F(b) - F(a)$  を考えればよい。  $\square$

定理 3.4 (定積分の基本性質：線形性)

$$(1) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \quad (\text{復号同順})$$

$$(2) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx. \quad (c \text{ は定数})$$

証明は (1) から分かる。線形性は不定積分についても成立する。

定理 3.5 (不定積分の基本性質：線形性)

$$(1) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \quad (\text{復号同順})$$

$$(2) \int cf(x)dx = c \int f(x)dx. \quad (c \text{ は定数})$$

定理 3.6 (定積分の基本性質：不等式)  $a < b$  とする。

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

$$(2) \quad f(x) \geq g(x) \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

$$(3) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)dx|.$$

$$(4) \quad m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b) \text{ のとき}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

証明は面積の比較と思うと理解しやすい。実際に証明する時は (1) を使  
うと証明がやりやすい。

定理 3.7 (シュワルツの不等式)  $a < b$  とする。

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

証明 実数  $c$  に対して

$$\int_a^b (f(x) + cg(x))^2 dx = \int_a^b f(x)^2 dx + 2c \int_a^b f(x)g(x)dx + c^2 \int_a^b g(x)^2 dx$$

と展開して、この式は常に非負だから、 $c$  に関する 2 次式としての判別  
式は 0 以下になる。これから求める式が出る。  $\square$

練習 3.2 (教科書 p.82 問 3.3, 3.4) 連続関数  $f(x)$  に対して次の式が成り  
立つ事確かめよ。

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_x^c f(u)du = -f(x)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_c^{x^2} f(u)du = 2xf(x^2)$$