

4.6.2 円柱座標

空間で極座標を考える前に、平面の極座標と空間の極座標の中間の円筒座標を紹介する．これは $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ と変数を取り替える変換で、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と表す． z はそのままにしておく．場合によっては空間の極座標を使うよりもよい場合がある．ヤコビアンは、平面の極座標と同じ r になる．

例 4.7 $a > 0$ とする．円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ によって切り取られる球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ の体積を求める¹．円筒座標を使う． x, y 平面の円周 $x^2 + y^2 = ax$ は中心が $(0, \frac{a}{2})$ で、半径が $\frac{a}{2}$ の円で、その内部は

$$r^2 - ar \cos \theta \leq 0 \quad \therefore r \leq a \cos \theta$$

で与えられる．これから $r \geq 0$ だから $\cos \theta \geq 0$ でなくてはならず、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

となる．考えている球は円筒座標では

$$r^2 + z^2 \leq a^2 \quad \therefore -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$

とかけるから、求める体積は次のように計算できることになる．

$$\begin{aligned} V &= \int_{\{\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \leq a \cos \theta, -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\}} r dr d\theta dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} dz \right) r dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} 2\sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

ここで、 $v = \sqrt{a^2 - r^2}$ とおくと $vdv = -rdr$ で、積分範囲は

$$a|\sin \theta| \leq v \leq a$$

¹後述するが $D \subset \mathbb{R}^2$ の面積は、 $\int_D dx dy$ で与えられる． $V \subset \mathbb{R}^3$ の体積も同様に $\int_V dx dy dz$ で求まる．

にかわる．したがって，

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} 2\sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a|\sin \theta|}^a 2v^2 dv d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^3}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta \\
 &= \frac{4a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) \theta d\theta \\
 &= \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

を得る．

4.6.3 空間の極座標

空間の極座標は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を使うので， $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ と書くことにして， $z = r \cos \phi$, $\rho = r \sin \phi$ とおく． z 軸に関する回転移動は x, y で表せることから， ϕ の範囲は $0 \leq \phi \leq \pi$ でよいことがわかる． x, y は

$$x = \rho \cos \theta = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta = r \sin \phi \sin \theta$$

と表すと， $0 \leq \theta < 2\pi$ となり， r は非負の値をとる．ヤコビアンを計算しよう．

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} \\
 &= -\cos \phi \begin{vmatrix} -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} - r \sin \phi \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi \end{vmatrix} \\
 &= -r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sin \phi \cos^2 \phi - r^2 \sin^3 \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= -r^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

変数変換にはヤコビアンの絶対値がかかるから，極座標に変換する時は積分に $r^2 \sin \phi$ がかかる事になる．

例 4.8 楕円体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積を求めよう。 $a, b, c > 0$ としておく。
変数変換は 3 次元の極座標を用いて,

$$x = ar \cos \theta \sin \phi, y = br \sin \theta \sin \phi, z = cr \cos \phi$$

となる。上の楕円体の式をこの変換で書き換えると,

$$r^2 \leq 1$$

となる。ヤコビアンは

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \phi & -ar \sin \theta \sin \phi & ar \cos \theta \cos \phi \\ b \sin \theta \sin \phi & br \cos \theta \sin \phi & br \sin \theta \cos \phi \\ c \cos \phi & 0 & -cr \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= -abcr^2 \sin \phi \end{aligned}$$

なので, これを $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ で積分して,

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 abc \sin \phi dr d\theta d\phi = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2abc = \frac{4\pi}{3} abc$$

練習 4.4 次の重積分を計算せよ．ただし $a > 0$ とする．

$$(1) \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}} x^2 z \, dx dy dz$$

$$(2) \int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$