4.7 その他重積分に関する補足

4.7.1 ジョルダン外測度と可測集合

定義 4.1 平面の有界集合 A が**ジョルダンの意味で可測**とは

$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \text{のとき} \\ 0 & (x,y) \notin A \text{のとき} \end{cases}$$

という関数（ A の指示関数）が積分可能な時に言う．このとき A のジョルダン測度 $|A|$ を

$$|A| = \int_A dxdy = \int_R 1_A(x,y)dxdy \qquad (R \text{ は } A \text{ を含む長方形})$$

と定める．この値は R によらずに決まる．

A が有界でないとき，A が**ジョルダンの意味で可測**とは任意の $n > 0$ に対して $A \cap \{x^2 + y^2 \leq n^2\}$ がジョルダンの意味で可測なときに言う．

ダルブーの定理により有界な A に対して

$$\bar{S}(1_A) = \lim_{|\Delta| \to 0} \bar{S}(1_A, \Delta)$$

が存在することは知られている．この値 $\bar{S}(1_A)$ を A の**ジョルダン外測度**と呼ぶ．ジョルダン外測度が 0 の集合は積分に影響を与えない．従ってヤコビアンが 0 になる集合のジョルダン外測度が 0 ならば変数変換の公式がそのまま成り立つ（教科書定理 5.16）．

ジョルダン可測集合の定義はそのまま多次元にも拡張できる．変数変換の定理（教科書定理 5.16）もそのまま成り立つ．

4.7.2 広義積分

無限領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の積分は広義積分として考えるが，無限に広げる広げかたがいろんなやり方があるため，広義積分の定義が条件が厳しくなっている．

定義 4.2 （教科書定義 5.5）

平面内の可測集合 D に対して D に含まれる有界な可測集合の列 $\{A_n\}$ が D の**可測な取り尽くし列**であるとは次の条件 (A),(B) を満たすことを言う．

(A)　$A_n \subset A_{n+1},\ n \geq 1$

(B)　任意の有界な可測集合 $K \subset D$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} |K \cap A_n| = |K|.$$

D 上無限大になる関数や D が無限領域の時の関数の積分は広義積分になる．

定理 4.3 (教科書命題 5.3)

$\{A_n\}, \{B_n\}$ を D の可測な取りつくし列とする．$f \geq 0$ が各 $n \geq 1$ に対して A_n および B_n 上で積分可能とする．この時，

$$\sup_n \int_{A_n} f(x,y)dxdy < \infty \Longleftrightarrow \sup_n \int_{B_n} f(x,y)dxdy < \infty$$

である．さらに，上の条件が成り立つとき

$$\sup_n \int_{A_n} f(x,y)dxdy = \sup_n \int_{B_n} f(x,y)dxdy.$$

この定理により次の定義が可能になる．

定義 4.3 （教科書定義 5.6）

可測集合 D 上 $f \geq 0$ となるとき，ある D の可測な取りつくし列 $\{A_n\}$ がとれて，f は各 A_n 上積分可能で，さらに

$$\sup_{n\geq 1} \int_{A_n} f(x,y)dxdy < \infty$$

となるときに言う．このとき

$$\int_D f(x,y)dxdy = \sup_{n\geq 1} \int_{A_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x,y)dxdy$$

と定める．

一般の f に対しては

$$f^+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}, \qquad f^-(x,y) = \min\{-f(x,y), 0\}$$

とおくと $f = f^+ - f^-$ だから，f^+, f^- がともに D 上で広義積分可能であるときに f は D 上広義積分可能であるといい，

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_D f(x,y)dxdy - \int_D f(x,y)dxdy$$

と定める．

例 4.9 (教科書例題 5.16)　次の広義積分を計算せよ．
(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$ に対して

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy$$

(2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x^2 + y^2 \leq x\}$ に対して

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

解答　(1) 分母は単位円周上で 0 になるので，可測な取りつくしの列として $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ をとる．平面の極座標変換により

$$\begin{aligned}
\int_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} &= \int_{\{0 \leq r \leq \sqrt{1 - \frac{1}{n}},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1 - r^2}} \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-1/n}} \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} \\
&= 2\pi \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_0^{\sqrt{1-1/n}} \\
&= 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \\
&\to 2\pi
\end{aligned}$$

この積分値は n とともに単調増加するので，極限が上限と一致．よって

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 2\pi$$

(2) $E_n = \{\frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq x\}$ とおく．あきらかに $E_n \uparrow E$ だからこれは可測な取りつくし列になっている．このとき (1) と同様に

$$\begin{aligned}
\int_{E_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \int_{\{-\pi \leq \theta \leq \pi,\, \sqrt{\frac{1}{n}} \leq r \leq \cos\theta\}} \frac{rdrd\theta}{r} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) d\theta \\
&\to \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \\
&= 2
\end{aligned}$$

練習 4.5 $\alpha > 1$ のとき $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}$ は $D = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$ で広義積分可能であることを示し,

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dxdy$$

の値を求めよ.