4.8 線積分とガウス・グリーンの公式

4.8.1 線積分

平面上の C^1-級の曲線とは

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

と与えられる図形 $C = \{(x(t), y(t)\,;\, a \leq t \leq b\}$ で $x(t), y(t)$ がともに C^1-級の関数であるものを言う．このとき，曲線の長さを定義したときのようにして，ベクトル関数 $(f(x,y), g(x,y))$ の曲線 C に沿った線積分を

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_a^b \{f(x(t),y(t))\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\dot{y}(t)\}\,dt$$

という式で定義する．これもパラメータの取りかたにはよらない．

たとえば $t = t(s)$ と変数を取り替えたとする．$c \leq s \leq d$ のとき t が $a \leq t \leq b$ を動くとすると，変数変換の公式から

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_c^d \{f(x(t(s)),y(t(s)))\dot{x}(t(s)) + g(x(t(s)),y(t(s)))\dot{y}(t(s))\}\,\frac{dt(s)}{ds}ds \\
&= \int_c^d \left\{f(x(t(s)),y(t(s)))\frac{dx(t(s))}{ds} + g(x(t(s)),y(t(s)))\frac{dy(t(s))}{ds}\right\}ds
\end{aligned}$$

つまり $X(s) = x(t(s)), Y(s) = y(t(s))$ とかくと

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_c^d \left\{f(X(s),Y(s))\dot{X}(s) + g(X(s),Y(s))\dot{Y}(s)\right\}ds$$

と $X(s), Y(s)$ でパラメータ表示したときの線積分の式になっている．

例 4.13 (教科書例題 5.20)
$C = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1\}$ を反時計回りに向き付けた曲線として線積分

$$\int_C xdy + ydx$$

を求める． パラメータづけは

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

として良い．定義から

$$\begin{aligned}
\int_C xdy + ydx &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = 0
\end{aligned}$$

4.8.2 ガウス・グリーンの公式

定理 4.4 D を有限個のなめらかな曲線で囲まれる有界な閉集合とする．境界を ∂D と書く．f, g が D で C^1-級の関数ならば

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つ．ただし，∂D の向きは進行方向左側に D の内部を見るように進むものとする．

証明　f について

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx = -\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy$$

を示す。 g については同じ考え方で

$$\int_{\partial D} g(x,y)dx = \int_D \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dxdy$$

を示す事ができる。また、ここでは D が縦線形の集合の時のみ示す。（一般の場合は教科書 $p.226$ を参照）

$$D = \{(x,y); a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

とする。

　まず、$\{x=a\}, \{x=b\}$ 上での x についての線積分は（ x が動かないので） 0 になる。したがって、

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f(x,y)dx &= \int_a^b f(x,\phi(x))dx - \int_a^b f(x,\psi(x))dx \\
&= \int_a^b f(x,\phi(x)) - f(x,\psi(x))dx \\
&= -\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \right) dx \\
&- \int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dxdy
\end{aligned}$$

□

系 4.5 定理の領域 D の面積は

$$|D| = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

で与えられる．

証明　ガウス・グリーンの公式から

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} xdy &= \int_D (1-0)dxdy = |D| \\
-\int_{\partial D} ydx &= -\int_D (0-1)dxdy = |D| \\
\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx &= \frac{1}{2}\int_D (1+1)dxdy = |D|
\end{aligned}$$

□

練習 4.7 線積分

$$\int_{\{x^2/4+y^2=1\}} (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$$

を求めよ．ただし，楕円 $\{x^2/4+y^2=1\}$ の向きは反時計まわりとする．