

3.2 基本的な不定積分

初等関数の不定積分

$f(x)$	$\int f(x)dx$	備考
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbf{R}, a \neq -1$ $a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\log x $	
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log f(x) $	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sec^2 x$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\text{Arcsin} \frac{x}{a}$	$a > 0$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{x}{a}$	$a > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$	$\log x + \sqrt{x^2 + a} $	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2 + a}$	$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \log x + \sqrt{x^2 + a} \right)$	$a > 0$ $a^2 + b^2 > 0$ $a^2 + b^2 > 0$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{Arcsin} \frac{x}{a} \right)$	
$e^{ax} \sin bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	
$e^{ax} \cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$	

3.3 置換積分と部分積分

定理 3.9 (置換積分) $\varphi(t)$ が連続な導関数を持つならば $\varphi(t)$ の値域上で連続な関数 $f(x)$ について

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

さらにこのとき t が $a \rightarrow b$ と変化するのに対応して $x = \varphi(t)$ が $\alpha \rightarrow \beta$ と変化しているならば、

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

証明 $F(x) = \int f(x)dx$ つまり、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

という式がでる。したがって、

$$F(\beta) - F(\alpha) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

として後半が出る。前半はこれを不定積分で書いたと思えば良い。 \square

例 3.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ を計算する。(教科書 例 3.20 参考) $x = a \sin t$ と置換すると $dx = a \cos t dt$ で

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t}} = \int dt = t + C$$

$x = a \sin t$ とおいたから $t = \text{Arcsin}(x/a)$ なので、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arcsin}(x/a) + C$$

また $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ の計算も、(教科書 例 3.2) $x = a \tan t$ とおくと、 $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ だから、

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a}{a^2 \cos^2 t (1 + \tan^2 t)} dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{x}{a} + C$$

練習 3.3 (教科書 p.91 問 3.8) 次の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) x\sqrt{1+x^2} \quad (2) \frac{\log x}{x} \quad (3) xe^{x^2} \quad (4) \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

ヒント: (4) は $t = \sqrt{x}$ とおいてみる。

練習 3.4 (教科書 p.91 問 3.9) 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} \quad (3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

定理 3.10 (偶関数・奇関数の定積分)

$$(1) f(x) \text{ が偶関数のとき } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$(1) f(x) \text{ が奇関数のとき } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

証明 $y = -x$ と変数変換すると f が偶関数の時

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-y) dy = \int_0^a f(y) dy$$

f が奇関数ならば

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-y) dy = - \int_0^a f(y) dy$$

となるので求める式が定積分の加法性から得られる。 \square

例 3.2 (教科書 p.102 例 3.18)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log |x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

の計算をしよう。置換の仕方が特殊である(高校ではやらない計算)。

$\sqrt{x^2+a} = t - x$ (または $x + \sqrt{x^2+a} = t$) とおく。両辺を自乗して

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

これを x について解くと

$$x = \frac{t^2 - a}{2t} \quad \therefore dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2t^2} \right) dt = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt$$

また、

$$\sqrt{x^2 + a} = t - x = \frac{t^2 + a}{2t}$$

となり、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{t^2 + a}{2t^2} \frac{2t}{t^2 + a} dt = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

練習 3.5 次の不定積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$