3.5 積分の計算

3.5.1 (1) 有理関数の積分

$P(x), Q(x)$ を実数を係数とする多項式とする．このとき，不定積分 $\displaystyle\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ を計算する事を目的にする．Q の次数を n とすると代数学の基本定理により，方程式 $Q(x)=0$ はちょうど n 個の複素数解を持つ[1]．また複素数 $a+ib$ が $Q(x)=0$ の解ならば $a-ib$ も解になることは確かめてみればよい．したがって $Q(x)$ は因数分解すると 2 次式と 1 次式のいくつかの式の積という形にできる．

$$Q(x)=A(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\times\cdots\times(x^2+b_kx+c_k)^{m_k}\times(x+d_1)^{n_1}\times\cdots\times(x+d_j)^{n_j}$$

ただし，$b_j^2-4c_j<0,\ (j=1,2,\ldots,k)$. そうすると $P(x)/Q(x)$ を **部分分数**に展開することができる．

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= R(x)+\frac{e_1x+f_1}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\\ &\quad+\ldots(\text{分母が 2 次式のべき、分子が 1 次式})\ldots\\ &\quad+\frac{g_1}{(x+d_1)_1^n}++\ldots(\text{分母が 1 次式のべき、分子が定数})\ldots.\end{aligned}$$

ただし，$R(x)$ は 0 または多項式.

判別式が負の 2 次式について；

$$\begin{aligned}\int\frac{ex+f}{(x^2+b_1x+c_1)^{-m}}dx &= a\int\frac{2x+b_1}{(x^2+b_1x+c_1)^{-m}}dx\\ &\quad+a'\int\frac{1}{((x+b_1/2)^2+c_1^*)^m}dx\end{aligned}$$

とかけ，前半は $u=x^2+b_1x+c_1$ と置換積分ができ，後半は $c_1^*>0$ であるから $y=(x+b_1)/\sqrt{c_1^*}$ と置換積分ができる．分母が 1 次式のべきの積分は出きるから，これで原理的には有理関数の不定積分が求まることになる[2].

例 3.7 （教科書 p.97 例 3.12）

$$\int\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}dx \text{ を計算する．}$$

[1]関数論で習う

[2]実際には因数分解が簡単に出きるとは限らないので計算は難しいことも多い.

最初に部分分数展開を実行する．無理やり

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

と置いて，等式が成り立つように a, b, c, d を求める．

上式の両辺に $(x-1)^2(x^2-x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned} x-2 &= a(x-1)(x^2-x+1) + b(x^2-x+1) + (cx+d)(x-1)^2 \\ &= (a+c)x^3 + (-2a+b+d-2c)x^2 \\ &\quad + (2a-b+c-2d)x + (-a+b+d) \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ b-2a-2c+d &= 0 \\ 2a-b+c-2d &= 1 \\ -a+b+d &= -2 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2, b=-1, c=-2, d=1$ となるので，求める部分分数展開は

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)}$$

となる．$(x^2-x+1)' = 2x-1$ だから

$$\begin{aligned} &\int \frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)} dx \\ &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)} \right) dx \\ &= 2\log|x-1| + \frac{1}{x-1} - \log(x^2-x+1) + C \\ &= \log\frac{(x-1)^2}{(x^2-x+1)} + \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

練習 3.8 （教科書 p.99 問 3.14）次の関数の不定積分を求めよ[3]．

$$(1)\frac{x^4}{x^2+1} \qquad (2)\frac{1}{x(x+2)^3} \qquad (3)\frac{1}{x^3+1}$$

[3] (3) ができたら有理関数の積分が良く分かったといえるだろう．

3.5.2　(2) 三角関数の積分

例 3.8 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \\ &= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}, & n \text{ 奇数} \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

を示す．部分積分により,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

この漸化式を解けばよい．$\cos^n x$ の代わりに $\sin^n x$ の積分を考えても同様に計算できる．各自確かめてほしい．

3.5.3　三角関数の有理式の積分

$R(x, y)$ は x, y の有理式とする．このとき

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

を計算することができる．このときは $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくことにより t の有理式の積分に書き換えることができる．

$$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \frac{1+t^2}{2} dx \therefore dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

また,

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

だから，

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

となるからである．

例 3.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$ を計算する．$t = \tan\frac{x}{2}$ とおいて，

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

だから

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)+t} = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$s = t + \frac{1}{2}$ とおくと上式右辺は

$$\int \frac{ds}{\frac{3}{4}+s^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{2s}{\sqrt{3}} + C$$

と計算できる．最後に $s = \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ をこの式に代入すれば求める不定積分が得られる．(綺麗な形ではないが)

練習 3.9 次の不定積分を計算せよ

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$