3.5.4 (3) 無理関数の積分

不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

について，$a>0$ ならば前にやったように $t-\sqrt{a}x=\sqrt{ax^2+bx+c}$ とおくことにより，

$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}, \quad dx=\frac{2(t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a})}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt$$

また

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

だから，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{2}{b+\sqrt{a}t}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}\log|b+\sqrt{a}t|+C$$

として最後に $t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$ を代入すればよい．

原理的には $R(x,y)$ を有理式としてこの方法で

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

が積分できる．

$a<0$ ならば ax^2+bx+c の判別式は正であるとしてよい．(なぜなら，判別式が負で $a<0$ なら根号内は常に負となるので考えなくてよい．また，判別式が 0 なら一次式の絶対値の積分だから計算できる.)

この時，$ax^2+bx+c=0$ は 2 実解 $\alpha<\beta$ を持つ．

$$t=\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

とおくと

$$t^2=\frac{x-\alpha}{\beta-x}, \qquad x=\frac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2}$$

となり，

$$dx=\frac{2t(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}dt,$$

および

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{|a|}(\beta - x)t = \sqrt{|a|}t\left(\beta - \frac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2}\right)$$

なのでこれは t の有理式．よって

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

は t の有理式の積分に置き換えられて積分可能.

例 3.10

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$$

を計算しよう． $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ とおくと,

$$x = \frac{2t^2+1}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

で,

$$\sqrt{(x-1)(2-x)} = (2-x)t = \frac{t}{1+t^2}$$

とあわせて

$$\int \sqrt{(x-1)(2-x)}dx = \int \frac{1+t^2}{t}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt$$

この値は

$$2\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} + C$$

となる.

3.6 広義積分

3.6.1 無限区間上の積分

例として $[0,\infty)$ 上の積分を考えよう．他の無限区間の上の積分も同様に考えればよい.

定義 3.1 関数 $f(x)$ が任意の $N > 0$ に対して $[0, n]$ 上で積分可能でさらに

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N f(x)dx$$

が存在するとき，この極限を

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

と定義して，f は $[0, \infty)$ 上 (リーマンの意味で）**広義積分可能**と言う.

例 3.11

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha} & if\, \alpha < -1 \\ \infty & if\, \alpha \geq -1 \end{cases}$$

を示す．$\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_1^N x^\alpha dx = \left[\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\right]_1^N$$

$N \to \infty$ とするとき，$1+\alpha > 0$ ならば $N^{1+\alpha} \to \infty$ で，右辺は無限大にいく.

$1+\alpha < 0$ ならば $N^{1+\alpha} \to 0$ で，上式右辺は $-\dfrac{1}{1+\alpha}$ に収束.

3.6.2 特異点の付近での積分

$f(x)$ が $x = a$ で $\pm\infty$ に発散するような時を考える．a より右側と左側で別々に考える．どちらでも同じなので，区間 $(a, b]$ で考える．通常の意味では f は ∞ になるので区間 $[a, b]$ 上では積分できない．これも無限区間のように考える.

定義 3.2 任意の $b - a > \varepsilon > 0$ に対して f が区間 $[a+\varepsilon, b]$ 上で積分可能で,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

が存在するならば，f は $(a, b]$ 上広義積分可能といい，この極限を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く.

例 3.12 (ガンマ関数 $\Gamma(s)$) $s>0$ に対して

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

が定義でき，

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

が成り立つことを確かめる．これは広義積分で

$$\Gamma(s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{s-1}e^{-x}dx$$

と理解する．一般の $s>0$ に対してはこの極限の値は計算できないが，被積分関数が非負なので，二つの極限が $\varepsilon\to 0, N\to\infty$ のとき単調に増大していることは間違いない．

単調増大数列が上に有界ならば極限を持つ

ので，この途中の積分が上から定数で抑えられる事を言えば極限があることが分かる．

$$\int_\varepsilon^1 x^{s-1}e^{-x}dx\le\int_\varepsilon^1 x^{s-1}dx=\left[\frac{x^s}{s}\right]_\varepsilon^1\le\frac{1}{s}<\infty.$$

および $x\ge 1$ で $x^{s+1}e^{-x}$ は最大値 $M=(s+1)^{s+1}e^{-(s+1)}$ をとるので，

$$\int_1^N x^{s-1}e^{-x}dx\le\int_1^N Mx^{-2}dx\le M.$$

となり，積分が上に有界なことが言えた．よって $\Gamma(s)$ は $s>0$ で定義できる．後半は，積分の存在が分かったので形式的に部分積分して

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty x^s e^{-x}dx=\left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty sx^{s-1}e^{-x}dx=0+s\Gamma(s)$$

とすればよい．

練習 3.10 (1) 次の広義積分が収束する事を確かめよ。

$$\int_0^\pi\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

(2) すべての実数 p に対して次を証明せよ。

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^p}=\infty$$