

3.7 積分の理論

閉区間 $[a, b]$ 上で定義された関数¹ $f(x)$ の定積分を考える。
分割, 分点 Δ 閉区間 $[a, b]$ を有限個の分点 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ によって区切る。これを分割

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

を与えると言う。 $\{t_j\}_{j=0}^n$ を分割 Δ の分点と呼ぶ。

$$|\Delta| = \max_{1 \leq j \leq n} |t_j - t_{j-1}|$$

を分割 Δ の幅という。不足和, 過剰和 分割 $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ が与えられたとき, 関数 $f(x)$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{S}(f; \Delta) &= \sum_{j=1}^n M_j |t_j - t_{j-1}| \\ \underline{S}(f; \Delta) &= \sum_{j=1}^n m_j |t_j - t_{j-1}|\end{aligned}$$

とおく。ただし, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$M_j = \sup\{f(x); t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, \quad m_j = \inf\{f(x); t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$$

とする。 $\bar{S}(f; \Delta)$ を過剰和, $\underline{S}(f; \Delta)$ を不足和と呼ぶ。

細分 Δ_1, Δ_2 を区間 $[a, b]$ の分割とするそれぞれの分点を $\{t_j\}_{j=0}^n, \{s_k\}_{k=0}^m$ と書くことにする。このとき, Δ_1 は Δ_2 の細分であるとは, Δ_1 の分点はすべての Δ_2 の分点を含む, つまり

$$\{t_j\}_{j=0}^n \supset \{s_k\}_{k=0}^m$$

となるときに言う。このとき $\Delta_1 \triangleright \Delta_2$ と書くことにしよう²。

定義から $\Delta_1 \triangleright \Delta_2$ のとき

$$\bar{S}(f; \Delta_1) \leq \bar{S}(f; \Delta_2)$$

$$\underline{S}(f; \Delta_1) \geq \underline{S}(f; \Delta_2)$$

が成り立つことは明らかだろう。

¹こう書くと分かった気になるが, これではあまりにも対象が広すぎて困ることになる。例えば有理数で 0 無理数で 1 の値をとる関数などもある。

²細分の記号として国際標準は決まっていないようだ。教科書によっては $\Delta_1 \succeq \Delta_2$ と書いているのもある。記号を使わない事も多い。

定理 3.11 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば

$$\lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \bar{S}(f; \Delta_n) = \lim_{|\Delta_n| \rightarrow 0} \underline{S}(f; \Delta_n) \quad (4)$$

が成り立つ .

(4) が成り立つとき f は $[a, b]$ 上 Riemann の意味で積分可能と言い , この極限を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と書く .

定理 3.11 の証明

1) 細分列にそった極限の存在

最初に $[a, b]$ の分割の細分列 $\{\Delta_n\}$ をとる . つまり $n < m$ ならば $\Delta_m \supset \Delta_n$ となるものとする . さらに定理の仮定のように

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$$

としておく . この時 , 上に注意したように

$$\underline{S}(f; \Delta_1) \leq \dots \leq \underline{S}(f; \Delta_n) \leq \bar{S}(f; \Delta_n) \leq \dots \leq \bar{S}(f; \Delta_1)$$

となり , $\{\bar{S}(f; \Delta_n)\}$ は下に有界な単調減少列で , $\underline{S}(f; \Delta_n)$ は上に有界な単調増大列であり , どちらも $n \rightarrow \infty$ のとき極限 $\bar{S}(f)$ と $\underline{S}(f)$ をもつ . 途中の不等式から $\underline{S}(f; \Delta_n) \leq \bar{S}(f; \Delta_n)$ だから , $n \rightarrow \infty$ として $\underline{S}(f) \leq \bar{S}(f)$ が分かる .

一方で , $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続なので , $f(x)$ は $[a, b]$ 上で一様連続³になることが知られている . つまり

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が決まって , $x, y \in [a, b]$ が $|x - y| < \delta$ を満たすほど近ければ $[a, b]$ 内のどこにあっても

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ .

このことを使うと , $\varepsilon > 0$ を任意に小さく与えたとき , δ を一様連続性から選んでおく . 細分列 $\{\Delta_n\}$ で n を大きくとれば $|\Delta_n| < \delta$ とできる . このような分割 Δ_n について考える .

³ $f(x) = \frac{1}{x}$ は $(0, 1]$ では一様連続ではないが , $[c, 1]$ ($0 < c < 1$) 上では一様連続になる .

分割 Δ_n の分点を $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ と書こう．ほんとはそれぞれの分点は n に関して変わるので $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_m^{(n)}$ と表すべきだが，記号が複雑になるので上のように n は省略しておく．

分割 Δ_n の各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ 上では $f(x)$ は連続なので最大値と最小値をとる点 c_j, d_j が $t_{j-1} \leq c_j, d_j \leq t_j$ とれて

$$f(c_j) \leq f(x) \leq f(d_j) \quad t_{j-1} \leq \forall x \leq t_j$$

となる．つまり，このとき $M_j = f(d_j), m_j = f(c_j)$ だから，

$$|c_j - d_j| \leq t_j - t_{j-1} \leq |\Delta_n| < \delta$$

となるが，一様連続性からこのとき

$$0 \leq M_j - m_j = f(d_j) - f(c_j) \leq \varepsilon$$

となっている．これは任意の $1 \leq j \leq m$ で正しい．

このことから $|\Delta_n| < \delta$ ならば

$$0 \leq \bar{S}(f; \Delta_n) - \underline{S}(f; \Delta_n) = \sum_{j=1}^m (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leq \varepsilon \sum_j (t_j - t_{j-1}) = (b-a)\varepsilon.$$

この差は n とともに単調に減少するから $n \rightarrow \infty$ として

$$0 \leq \bar{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \varepsilon(b-a)$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ． $\varepsilon \rightarrow 0$ として $\bar{S}(f) = \underline{S}(f)$ が成り立つ．この値を単に S と書いておく．

分割の幅が小さければ過剰和も不足和も S に近いこと

最後に，任意の分割 $\varepsilon > 0$ に対して δ_0 がとれて $|\Delta| < \delta_0$ ならば

$$|\underline{S}(f; \Delta) - S| < \varepsilon, \quad |\bar{S}(f; \Delta) - S| < \varepsilon$$

が成り立つことを言えばよい（ S が最初にとった細分列 $\{\Delta_n\}$ に関して決まっている事に注意．上の式はこれが細分列のとり方によらないことを言っている．）

まず，細分列 $\{\Delta_n\}$ の元で n を十分大きくとり，

$$|\underline{S}(f; \Delta_n) - S| + |\bar{S}(f; \Delta) - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにしておくことができる. Δ_n の分点を $\{t_j\}_{j=1}^m$ と書こう. $\delta_0 > 0$ を十分小さくとり, $x, y \in [a, b]$ が $|x - y| < \delta_0$ を満たすならば

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となるようにしておく. これは f の一様連続性から可能.

いま, $|\Delta| < \delta_0$ とする. この時, Δ の分点を $\{s_i\}_{i=0}^N$ と書くとき, 上と同じ議論で

$$0 \leq \bar{S}(f; \delta) - \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)(s_i - s_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^N (s_i - s_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

が分かる.

次に, Δ と Δ_n の分点を合わせてできる分割を Δ^* と書こう. Δ^* は Δ, Δ_n の細分になっているから

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f; \Delta_n) \leq \underline{S}(f; \Delta^*) \leq \bar{S}(f; \Delta^*) \leq \bar{S}(f; \Delta_n) < S + \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

となる. また Δ の任意の小区間 $[s_{i-1}, s_i]$ をみるとき, この中に Δ^* の分点が $s_{i-1} = u_0^i < u_1^i < \dots < u_{k(i)}^i = s_i$ と入っているとすると, この区間内での $\underline{S}(f; \Delta^*)$ と $\underline{S}(f; \Delta)$ に対応する差は

$$\sum_{\ell=1}^{k(i)} \min_{x \in [u_{\ell-1}^i, u_{\ell}^i]} f(x)(u_{\ell}^i - u_{\ell-1}^i) - m_i(s_i - s_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon(s_i - s_{i-1})}{2(b-a)}$$

と評価できる. したがってこれを i について加えると

$$0 \leq \underline{S}(f; \Delta^*) - \underline{S}(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

(5), (6) を合わせると,

$$\underline{S}(f; \Delta) > \underline{S}(f; \Delta^*) - \frac{\varepsilon}{2} > S - \varepsilon$$

同じ議論で $\bar{S}(f; \Delta)$ についても

$$\bar{S}(f; \Delta) < \bar{S}(f; \Delta^*) + \frac{\varepsilon}{2} < S + \varepsilon$$

したがって S をひくと

$$-\varepsilon < \underline{S}(f; \Delta) - S \leq \bar{S}(f; \Delta) - S < \varepsilon$$

が出てくる. □

練習 3.11 今日の講義で, 疑問に思ったことをリストアップせよ.