3.8 曲線の長さ

平面上の曲線は二つの実数値関数の組 (x(t), y(t)) を区間 $[\alpha, \beta]$ で考える事で表現できる（時間が経つ毎に点 $(x(t), y(t))$ が動いて行くイメージ）

この曲線の長さは次のようにして求める。

1. 区間 $[\alpha, \beta]$ の n 等分点を $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ ととる。$P_k = (x(t_k), y(t_k))$ とかく。

2. 折れ線 $P_0 \mapsto P_1 \mapsto \ldots \mapsto P_n$ の長さ L_n を考えると、

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

   となる。

3. $n \to \infty$ のとき、L_n の極限があるならば、それを曲線 $\{(x(t), y(t)); \alpha \leq t \leq \beta\}$ の長さと呼ぶ。

定理 3.12 $x(t), y(t)$ がともに C^1 級[1]の時、曲線 $\{(x(t), y(t)); \alpha \leq t \leq \beta\}$ の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dx}{dt}(t))^2 + (\frac{dy}{dt}(t))^2}\, dt$$

で与えられる。

証明　仮定から $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ は連続なので、閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上で一様連続である。つまり、任意に $\varepsilon > 0$ を与えた時、$\delta > 0$ を十分小さく選ぶと、$[\alpha, \beta]$ の勝手な 2 点 s, t が $|s - t| < \delta$ を満たせば常に

$$\left|\frac{dx}{dt}(t) - \frac{dx}{dt}(s)\right| < \varepsilon,\ \text{かつ}\ \left|\frac{dy}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(s)\right| < \varepsilon$$

とできる。いま、隣り合う n 等分点 t_{k-1}, t_k の距離は $|\beta - \alpha|/n$ だから、n を十分大きく取って $|\beta - \alpha|/n < \delta$ としておくと、$t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ならば

$$\left|\frac{dx}{dt}(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t)\right| < \varepsilon,\ \text{かつ}\ \left|\frac{dy}{dt}(t_{k-1}) - \frac{dy}{dt}(t)\right| < \varepsilon$$

[1]導関数があり、連続である事を言う。

となっている。したがって

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dx}{dt}(t)\,dt$$

だから

$$\left| x(t_k) - x(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon |t_k - t_{k-1}|$$

同じように

$$\left| y(t_k) - y(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon |t_k - t_{k-1}|$$

したがって三角不等式により

$$\begin{aligned}
&\left| \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} - \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t_{k-1})\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t_{k-1})\right)^2} |t_k - t_{k-1}| \right| \\
&\le \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1}) - \frac{dx}{dt}(t_k)|t_k - t_{k-1}|\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k-1}) - \frac{dy}{dt}(t_k)|t_k - t_{k-1}|\right)^2} \\
&\le \sqrt{2}\varepsilon |t_k - t_{k-1}|
\end{aligned}$$

となる。これを $k = 1, \ldots, n$ について加えると、

$$\left| L_n - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t_{k-1})\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t_{k-1})\right)^2} |t_k - t_{k-1}| \right| < |\beta - \alpha| \varepsilon$$

を得る。$n \to \infty$ として、

$$L_n \to \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

がわかる。 □

例 3.13 極座標表示での曲線 $r = \theta$, $(0 \le \theta \le 1)$ の長さを求める。

$$x(\theta) = r\cos\theta = \theta\cos\theta, \quad y(\theta) = r\sin\theta = \theta\sin\theta$$

だから、求める長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

と分かる。

練習 3.12 次の曲線の指定された区間での長さを求めよ。

(1) $y = x^{3/2}, \quad (0 \le x \le 5)$
ヒント： $x(t) = t, y(t) = t^{3/2}$ とかくと、公式が使える。

(2) $x(t) = 3t^2 + 2,\ y(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}, \quad (1 \le t \le 4)$

4 重積分

これから変数をたくさん持つ関数についての積分を勉強する．基本は 1 変数の積分だから恐れる必要はない．

4.1 長方形上の重積分

R を長方形 $[a,b] \times [c,d] := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ とする。R 上で定義された関数 $f = f(x,y)$ の定積分

$$\int_R f(x,y)\, dxdy$$

を以下の手順で定義する。

1° 区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割を

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b\} \\ \Delta_2 &= \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d\} \end{aligned}$$

をとり、

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \{C_{i,j} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j] \,:\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

を R の分割とする。分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を $\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ と定める。

2° 過剰和 $\overline{S}_\Delta$ と不足和 $\underline{S}_\Delta$ を、

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} |s_i - s_{i-1}| |t_j - t_{j-1}|$$
$$\underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} |s_i - s_{i-1}| |t_j - t_{j-1}|$$

とする。ただし、

$$M_{i,j} = \max\{f(x,y)\,;\,(x,y) \in C_{i,j}\}$$
$$m_{i,j} = \min\{f(x,y)\,;\,(x,y) \in C_{i,j}\}$$

とする。

3° 一変数の時と同じようにして

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}_\Delta = \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}_\Delta$$

となるときに f は R 上積分可能といい、この極限の値を

$$\int_R f(x,y)\, dxdy$$

とかく。

4° f が R で連続の時積分可能となる。