4.2　一般の集合上の重積分

E を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする。$f = f(x, y)$ が E 上で定義された関数の時、$E \subset R$ となる長方形 R に対して f を R 上に拡張した関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases}$$

とおく。このとき、$\tilde{f}$ の R 上の積分により f の E 上の積分とする。つまり、

$$\int_E f(x, y)\, dxdy = \int_R f(x, y)\, dxdy$$

あきらかに、この値は長方形 $R \supset E$ の取り方によらない。（ただ、どのような E の上で連続関数が積分可能になるかはうるさく言い出すと難しい。ここでは簡単な集合上の積分を念頭におく）特に、1_E で E 上 1 の値を取り、E^c 上で 0 を取る関数を考えると、

$$\int_E 1_E(x, y)\, dxdy$$

は E の面積を表す。上の注意からこれは

$$\int 1_E(x, y)\, dxdy$$

と書いて構わない。1_E が積分可能なとき、E は**面積確定**という。

4.3　累次積分

長方形 $[a, b] \times [c, d]$ 上の関数 $f(x, y)$ の積分はまずどちらかをとめて片方の変数について積分し、その結果を残りの変数について積分する。これを累次積分という。

例 4.1 $\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\, dxdy$ は次のように計算する。

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d xydy \right) dx = \int_a^b x\frac{d^2 - c^2}{2}\, dx = \frac{(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)}{4}$$

y から先に積分したが、x から先に積分しても結果は変わらない。このことは後で詳しく調べる事にする。

縦線形の領域上の積分平面の部分集合 D が次のように表されている時、縦線形の領域という。

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

ただし、$\varphi(x)$, $\psi(x)$ は連続で、$\varphi(x) \le \psi(x)$ が $a \le x \le b$ で成り立っているものとする。(x と y の役割が入れ替わっていても良い)

このとき、$f(x, y)$ が D で積分可能ならば

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

と逐次積分をすれば良い。これも後で詳しく述べる。

例 4.2 $f(x, y) = x^2 y^2$ を円板 $\{x^2 + y^2 \le 1\}$ 上で積分する。

$$D = \{(x, y);\ -1 \le x \le 1, -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned}
\int_D x^2 y^2\, dxdy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y^2\, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3} \bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 2x^2 \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3}\, dx \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx \\
&= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx \right)
\end{aligned}$$

$I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\, dx = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \frac{\pi}{2}$ なので、求める積分の値は

$$4 \left(\frac{3}{2^3} - \frac{5 \cdot 3}{2^3 3!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

となる。

注意 4.1 上の例で x または y の指数が奇数ならば対称性に気をつけると定積分の値は 0 である事が分かる。

練習 4.1 次の累次積分を計算せよ。

$$(1)\ \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\, dy \right) dx \quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\, dy \right) dx$$

定理 4.1 D が縦線形の領域、つまり連続な関数 $\varphi(x) \leq \psi(x)$ に対して

$$D = \{(x,y);\, a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

とかけるとき、(x と y の役割が入れ替わっても良い) $f(x,y)$ が $\overline{D}$ 上で連続ならば、

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で、従って積分可能で、

(2) 次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_D f(x,y)\, dxdy$$

証明 (1) $F(x+h) - F(x)$ を計算してみる。

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x+h,y)\, dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\, dy \\
&\quad + \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\, dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\, dy
\end{aligned}$$

$$+ \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\, dy - \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x,y)\, dy$$

$$:= I + II - III$$

$f(x,y)$ が有界閉集合 $\overline{D}$ 上で連続なので有界かつ一様連続として良く、このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $|h| + |k| < \delta$ ならば

$|f(x+h,y+k)-f(x,y)|<\varepsilon$ が任意の $(x,y)\in D$ に対して成り立つ。これより、$|h|<\delta$ のとき

$$|I|<\varepsilon\times\max\{|\psi(x)|+|\varphi(x)|; a\leq x\leq b\}$$

また、$\overline{D}$ で f は連続なので有界になるので、$|f(x,y)|\leq M$ が常に成り立つような M がとれて、

$$|II|\leq M|\psi(x+h)-\psi(x)|,\qquad |III|\leq M|\varphi(x+h)-\varphi(x)|$$

となる。$\psi(x),\varphi(x)$ は連続なので、II と III は $h\to 0$ のとき 0 に近づく。I は h が小さい時いくらでも小さいので、これも $h\to 0$ のとき 0 に行く。つまり $F(x)$ は連続。

(2) 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ を D を含むように取り、$\tilde{f}$ で f を D の外で 0 になるように拡張したものとする。$[a,b]$ の分割 $\Delta_1=\{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=b\}$ と $[c,d]$ の分割 $\Delta_2=\{c=t_0<t_1<\ldots<t_n=d\}$ をとると、

$$\begin{aligned}M_{i,j}&=\max\{\tilde{f}(x,y)\,;s_{i-1}\leq x\leq s_i,\,t_{j-1}\leq y\leq t_j\}\\ m_{i,j}&=\min\{\tilde{f}(x,y)\,;s_{i-1}\leq x\leq s_i,\,t_{j-1}\leq y\leq t_j\}\end{aligned}$$

に対して $s_{i-1}\leq x\leq s_i$ ならば

$$\sum_j m_{i,j}|t_j-t_{j-1}|\leq\int_c^d\tilde{f}(x,y)dy\leq\sum_j M_{i,j}|t_j-t_{j-1}|$$

この各辺を $[s_{i-1},s_i]$ で積分して、その後 i について加えると

$$\underline{S}_\Delta\leq\int_a^b F(x)\,dx\leq\overline{S}_\Delta$$

となる。ただし、 $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$. あとは $\tilde{f}$ が $[a,b]\times[c,d]$ で積分可能なことを言えばよいが、D の中では $\tilde{f}=f$ なので連続で、$M_{i,j}-m_{i,j}$ はどこででも一様に小さい。D の外では $\tilde{f}=0$ なので、$M_{i,j}=m_{i,j}=0$ だから、問題は $[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]$ のうち、$y=\psi(x),y=\varphi(x)$ と重なるものが問題。このような i,j では $m_{i,j}=0$ だが $M_{i,j}$ は大きい可能性がある。これは $y=\psi(x),y=\varphi(x)$ の一様連続性から $|\Delta|<\delta$ なら

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta-\underline{S}_\Delta\leq&\varepsilon(b-a)(d-c)\\ &+M\times(\max\{|\varphi(x)-\varphi(x')|+|\psi(x)-\psi(x')|\,;|x-x'|\leq\delta\}\\ &+2\delta)(b-a)\end{aligned}$$

が $|\Delta|\leq\delta$ の時に成り立つ。

□