4.4 積分順序の交換

重積分は x から積分しても y から積分しても良いという事を前に言った。ここではもう少し詳しくこの理由を考えてみる。前回，次の定理を証明した.

定理 4.1 D が縦線形の領域、つまり連続な関数 $\varphi(x) \leq \psi(x)$ に対して

$$D = \{(x, y);\, a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

とかけるとき、（x と y の役割が入れ替わっても良い）$f(x, y)$ が $\overline{D}$ 上で連続ならば、

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$ は区間 $[a, b]$ 上で連続で、従って積分可能で、

(2) 次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_D f(x, y)\, dxdy$$

この定理の証明では，縦と横は本質的な違いはないので，もし上の定理で

$$D = \{(x, y); c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

となる $c \leq y \leq d$ で連続な関数 $g(y), h(y)$ があるならば同じように議論することで

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

も成り立つ．つまり，積分の順序を入れ替え得ることができる．

注意 4.2 注意しないといけないのは，D を x 先に止めて y の動く範囲を見たときと y を最初に止めて x の動く範囲をみたものはまるきり見かけが違うことである．例えば，$a, b, c, d > 0$ として

$$D = \{(x, y)\,;\, a \leq x \leq b, x - c \leq y \leq 2x + d\}$$

は，y を先に止めると $2a+d \geq b-c$ の時は

$$\begin{aligned} D =& \{(x,y)\,;\, a-c \leq y \leq b-c, a \leq x \leq y+c\} \\ & \cup \{(x,y)\,;\, b-c \leq y \leq 2a+d, a \leq x \leq b\} \\ & \cup \{(x,y)\,;\, 2a+d \leq x \leq 2b+d, \frac{y-d}{2} \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

となる． （その他の場合は? 自分で考えて見てください）

例 4.3 積分域の書き直し 積分の順番を入れ換えると累次積分の積分の範囲が変わる。このことに注意して次の積分の順番を入れ換えてみる。

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx$$

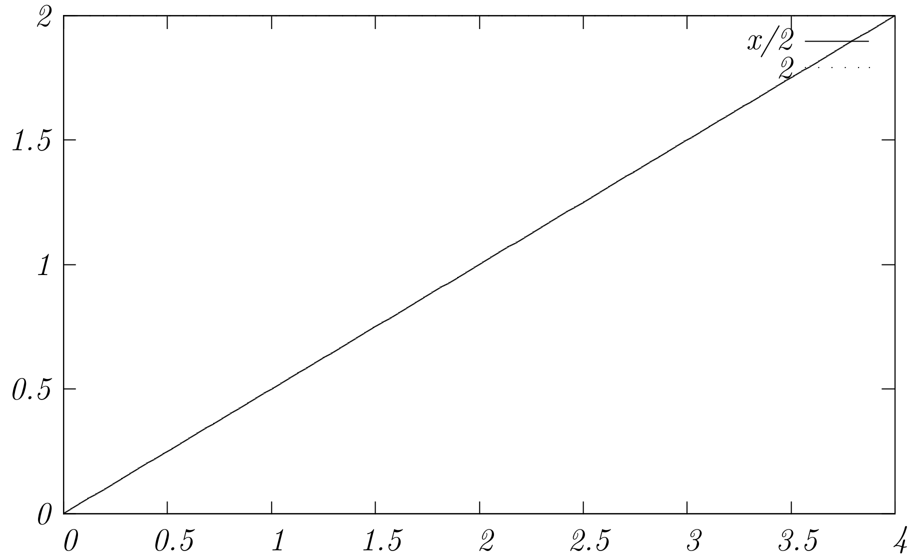
この場合、y の動ける範囲は $0 \leq y \leq 2$ であり、$\frac{x}{2} \leq y$ および $0 \leq x \leq 4$ より、

$$0 \leq x \leq 2y$$

が出てくる。したがってこの場合は簡単で、

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

となる。



例 4.4 D を $y=x^2$, $y=-x+2$, $y=\frac{1}{2}$ で囲まれた $y\geq x^2$ を満たす領域として $\int_D xy\,dxdy$ を計算する。図より $y=-x+2$ と $y=x^2$ の交点は $(-2,4),(1,1)$ でどちらも $y=1/2$ の上にあるので、x で先に積分した方が積分範囲の分解が簡単。

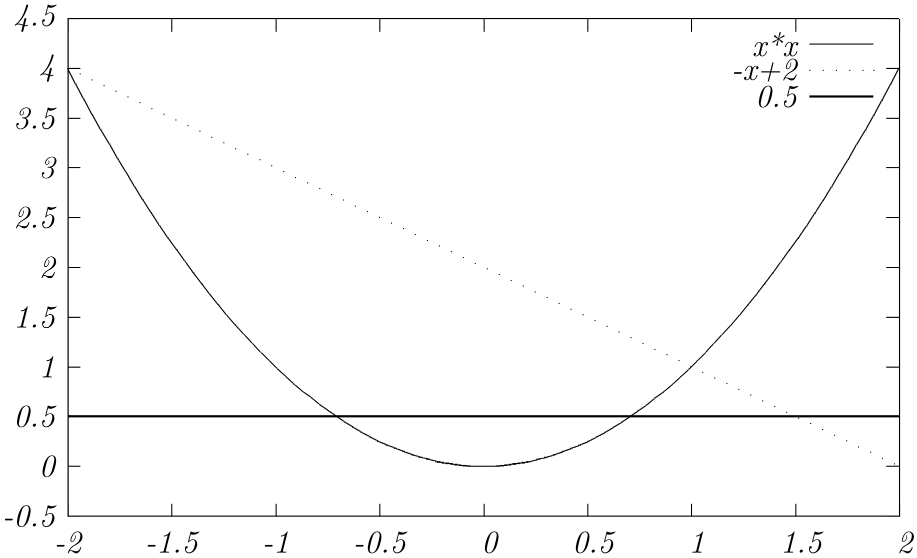
$$\begin{aligned}\int_D xy\,dxdy =& \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\,dxdy + \int_1^4\int_{-\sqrt{y}}^{-y+2} xy\,dxdy\\ =& \int_1^4 \frac{1}{2}(y(2-y)^2-y^2)dy\\ =& \frac{1}{2}\left[\int_1^4 y(y-2)^2dy - 21\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 y(y-2)^2dy =& \left[\frac{y(y-2)^3}{3}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{(y-2)^3}{3}dy\\ =& 11-\frac{5}{4}=\frac{39}{4}\end{aligned}$$

従って

$$\int_1^4 \frac{1}{2}(y(2-y)^2-y^2)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{39}{4}-21\right) = -\frac{45}{4}$$

となる[1].



[1]授業で配ったプリントには計算の間違いがありました．訂正しておきます

練習 4.2 次の積分順序を交換せよ。

$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx \qquad (2) \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dxdy$$

$$(3) \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x,y)\,dydx \qquad (4) \int_{1/2}^1 \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dydx$$

4.5 多重積分

変数がたくさんある場合も積分は同じように定義できる。積分の順序も交換できるので、計算は累次積分によって実行できる。

4.5.1 三重積分

$\mathbb{R}^3$ の直方体 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上の有界な関数 $f(x,y,z)$ が R 上積分可能であるとは、$i = 1, 2, 3$ に対して $[a_i, b_i]$ の分割

$$\Delta_i := \{a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \ldots < t_{i,n(i)} = b_i\}$$

を任意にとるとき、これらで作った R の分割

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$$

について、$|\Delta| = \max\{|\Delta_i|; i = 1, 2, 3\}$ が 0 に近づくならば、過剰和

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \max_{(x,y,z) \in C(j_1,j_2,j_3)} f(x,y,z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

および不足和

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \min_{(x,y,z) \in C(j_1,j_2,j_3)} f(x,y,z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

がそれぞれ同じ極限に近づく時にいう。