

## まとめの練習問題 解答例

1. (1) これは一旦問題からはなれて  $I_k = \int \cos^{2k} x dx$  の計算をしておく。部分積分により、

$$\begin{aligned} I_k &= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int \sin^2 x \cos^{2k-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{2k-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1)(I_{k-1} - I_k) \\ &= \frac{1}{2k} \sin x \cos^{2k-1} x + \frac{2k-1}{2k} I_{k-1} \end{aligned}$$

これにより、求める積分は

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= I_3 - I_2 \\ &= \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{6} I_2 \\ &= \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{6 \cdot 4} \sin x \cos^3 x - \frac{3}{6 \cdot 4} I_1 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} + C \end{aligned}$$

だから

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{24} \sin x \cos^3 x - \frac{1}{16} \sin x \cos x - \frac{x}{16} + C$$

- (2)  $\cos x = t$  とおくと、 $\sin^2 x = 1 - t^2$  で、 $-\sin x dx = dt$  だから、

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = - \int (1 - t^2) t^4 dt = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

(3) 加法定理より、

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x)$$

だから、

$$\int \sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2} \left( \cos x - \frac{\cos 5x}{5} \right) + C$$

(4)  $\sqrt{x} = t$  とおくと、 $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$  だから、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \int \frac{2dt}{t - 1} = 2 \log |\sqrt{x} - 1| + C \end{aligned}$$

(5)  $t = (x - 4)^{1/3}$  とおく。  $t^3 = x - 4$  より  $x = t^3 + 4$  だから  $dx = 3t^2 dt$  となり、

$$\begin{aligned} \int x(x - 4)^{1/3} dx &= \int (t^3 + 4) \cdot t \cdot 3t^2 dt = \int (3t^6 + 12t^3) dt \\ &= \frac{3(x - 4)^{7/3}}{7} + 3(x - 4)^{4/3} + C \end{aligned}$$

(6)  $x = a \sin t$  とおくと、  $dx = a \cos t dt$  だから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a^2 \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \sin^{-1} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \end{aligned}$$

(7)  $t = x + \sqrt{9 + x^2}$  とおいて、  $(t - x)^2 = 9 + x^2$  これを  $x$  について解くと、  $x = (t^2 - 9)/2t$  となり、  $dx = \frac{(t^2 + 9)}{2} t^{-2} dt$ 。また、

$$\sqrt{9 + x^2} = t - x = \frac{t^2 + 9}{2t}$$

だから、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int \frac{2t}{t^2 + 9} \frac{t^2 + 9}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |x + \sqrt{9 + x^2}| + C \end{aligned}$$

- (8)  $t = \sqrt{4-x^2}$  とおくと、 $x = \sqrt{4-t^2}$  で、 $dx = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}} dt$  だから、

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx &= - \int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} dt \\ &= - \int \frac{t^2}{4-t^2} dt = \int \left( 1 - \left( \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} \right) \right) dt \\ &= t + \log \left| \frac{2-t}{2+t} \right| + C \\ &= \sqrt{4-x^2} + \log \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}} \right| + C \end{aligned}$$

- (9)  $t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 5}$  とおくと、 $(t-x)^2 = x^2 + 2x + 5$  これをとおいて、

$$x = \frac{t^2 - 5}{2(1+t)}, \quad \therefore dx = \frac{t^2 + 2t + 5}{2(1+t)^2} dt$$

また、

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} = t - x = \frac{t^2 + 2t + 5}{2(1+t)}$$

となる。これらを代入すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} &= \int \frac{2(1+t)}{t^2 + 2t + 5} \frac{t^2 + 2t + 5}{2(1+t)^2} dt \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \log |1+x+\sqrt{x^2+2x+5}| + C \end{aligned}$$

- (10) 部分分数展開をする。 $a, b, c$  を

$$\frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{3x+2} + \frac{c}{x-3}$$

を満たすように求めよう。右辺を通分すると、分母は左辺の分母と同じになり、分子は

$$\begin{aligned} &a(3x+2)(x-3) + b(2x-1)(x-3) + c(2x-1)(3x+2) \\ &= (3a+2b+6c)x^2 + (-7a-7b+c)x + (-6a+3b-2c) \end{aligned}$$

となるので、分子を比較して、

$$3a + 2b + 6c = 7, \quad -7a - 7b + c = 2, \quad -6a + 3b - 2c = -3$$

これを解くと、 $a = \frac{1}{35}$ ,  $b = -\frac{1}{7}$ ,  $c = \frac{6}{5}$  となり、

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x - 1)(3x + 2)(x - 3)} dx &= \frac{1}{35} \int \frac{dx}{2x - 1} - \frac{1}{7} \int \frac{dx}{3x + 2} + \frac{6}{5} \int \frac{dx}{x - 3} \\ &= \frac{1}{70} \log |2x - 1| - \frac{1}{21} \log |3x + 2| + \frac{6}{5} \log |x - 3| + C \end{aligned}$$

(11) これも部分分数展開をする。

$$\frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4} = \frac{a}{x + 4} + \frac{b}{x - 1}$$

として、右辺を通分した時の分子は  $a(x - 1) + b(x + 4) = (a + b)x + 4b - a$  だから、 $a + b = 1$ ,  $4b - a = -11$  となる。これを解いて  $a = 3$ ,  $b = -2$  なので、

$$\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4} dx = \int \frac{3 dx}{x + 4} - \int \frac{2 dx}{x - 1} = 3 \log |x + 4| - 2 \log |x - 1| + C$$

(12) これも部分分数展開をする。

$$\frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)} = 1 - \frac{7x^2 - 7x + 16}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)} = 1 - \frac{a}{x + 3} - \frac{bx + c}{x^2 - 4x + 5}$$

とかいて、右辺第 2 項と第 3 項を通分した時の分子は  $(a + b)x^2 + (3b + c - 4a)x + 5a + 3c$  となるので、 $a + b = 7$ ,  $-4a + 3b + c = -7$ ,  $5a + 3c = 16$ . これをたいて  $a = \frac{50}{13}$ ,  $b = \frac{41}{13}$ ,  $c = -\frac{14}{13}$  を得る。

$$\int \frac{1}{13} \left( \frac{41x - 14}{x^2 - 4x + 5} \right) dx = \frac{41}{26} \log |x^2 - 4x + 5| + \frac{68}{13} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$$

ところで

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx &= \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{1 + t^2} dt \quad (t = x - 2, dt = dx) \\ &= \tan^{-1}(x - 2) + C \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)} dx &= x - \frac{50}{13} \log |x + 3| - \frac{41}{26} \log |x^2 - 4x + 5| \\ &\quad - \frac{68}{13} \tan^{-1}(x - 2) + C \end{aligned}$$

(13) 部分積分をする。

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

(14) これも部分積分をする。

$$\int x \sin 2x dx = -x \frac{1}{2} \cos 2x + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -x \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(15) これも部分積分をする。

$$\begin{aligned} \int x^3 \log x dx &= \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{x^3}{4} dx \\ &= \frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{12} + C \end{aligned}$$

(16) これも部分積分をする。

$$\int x \tan^{-1} x dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x + C$$

(17) これも部分積分をする。  $\cos^2 \sin x = (-\cos^3 x)'$  だから、

$$\int x \cos^2 x \sin x dx = -x \cos^3 x + \int \cos^3 x dx$$

$\cos^3 = (1 - \sin^2 x) \cos x$  だから

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

したがって、

$$\int x \cos^2 x \sin x dx = -x \cos^3 x + \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

(18)  $y = x^3 + 4$  とおくと、  $x^3 = y - 4$ ,  $3x^2 dx = dy$  で、

$$\begin{aligned} \int x^5 \sqrt{x^3 + 4} dx &= \frac{1}{3} \int (y - 4) \sqrt{y} dy \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{8}{3} y^{3/2} \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} \sqrt{(x^3 + 4)^5} - \frac{8}{3} \sqrt{(x^3 + 4)^3} \right) + C \end{aligned}$$

2.

(1)  $x - 1 = t$  とおくと、 $dx = dt$  で、

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \int_0^2 \frac{dt}{t^{1/3}} = \left[ \frac{3}{4} t^{4/3} \right]_0^2 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$$

(2)  $1 - x^2 = u$  とおくと、 $du = -2x dx$  で、

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^2)^{1/3}} = \int_0^1 \frac{du}{2u^{1/3}} = \left[ \frac{3}{8} u^{2/3} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

(3)  $9 - x^2 = t$  とおくと、 $dt = -2x dx$  で、

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left[ \sqrt{t} \right]_0^9 = 3$$

(4) これは不定積分が分かっているので、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[ \tan^{-1} x \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

(5) 部分分数展開をすると、

$$\frac{1}{x^2 + x^4} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

だから、

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x^4} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(6) 主値積分を実行。 $x = -\frac{3}{2}$  で分母が 0 になるので、

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-2}^{-\frac{3}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{2x+3} + \int_{-\frac{3}{2}+\varepsilon}^0 \frac{dx}{2x+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log |-\varepsilon| + \log 3 - \log \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

3. (1)  $1 \leq x < \infty$  のとき、 $x^6 + x \geq x^6$  だから、

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + x}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[ \frac{-1}{2} x^{-2} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{2} < \infty$$

したがってこの積分は収束。

(2) 部分積分をすると

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{e^{2x}} dx = \left[ \frac{-1}{2} e^{-2x} \log x \right]_1^{\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{xe^{2x}}$$

となり、右辺第 1 項は 0 である。また、 $x \geq 1$  のとき  $\frac{1}{xe^{2x}} \leq e^{-2x}$  だから、

$$\text{右辺第 2 項} \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{e^{-2}}{4}$$

となり、この広義積分は有界で、被積分関数が非負なので収束する。

(3)  $x \geq 3$  のとき、 $\log x \geq 1$  だから、

$$\int_3^{\infty} \frac{\log x}{x} dx \geq \int_3^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_3^{\infty} = \infty$$

したがってこの積分は発散する。

(4) これは部分積分をすれば

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^3} dx = \left[ -\frac{\log x}{2x^2} \right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x^3} = \frac{1}{4}$$

4. 問題にミスプリントがありました。右辺の の上端は  $2^n - 1$  ではなくて  $2^{n-1}$  です。

(a) 数学的帰納法で証明する。

$n = 1$  のときは両辺  $\cos \frac{x}{2}$  なので、この式は自明に正しい。 $n$  で等式が成り立つとして  $n + 1$  のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

となるが、加法定理により

$$\begin{aligned}\cos \frac{(2k-1)x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{(2k-1)x}{2^n} + \frac{x}{2^{n+1}} \right) + \cos \left( \frac{(2k-1)x}{2^n} - \frac{x}{2^{n+1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(4k-1)x}{2^{n+1}} + \cos \frac{(4k-3)x}{2^{n+1}} \right]\end{aligned}$$

となり、これを  $k=1$  から  $k=2^{n-1}$  まで加えて  $\frac{1}{2^{n-1}}$  をかけると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^n \cos \frac{(2k-1)x}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

- (b) これは区間  $[0, 1]$  を  $2^n$  等分した分割に対する  $f(t) = \cos tx$  のリーマン和と思える。(各小区間の代表点が区間の中央の点になっている。) したがって、 $\cos tx$  は  $t$  の連続な関数だから積分が可能で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \cos \frac{(2k-1)x}{2^{n+1}} = \int_0^1 \cos tx \, dt$$

(c)

$$\int_0^1 \cos tx \, dt = \left[ \frac{\sin tx}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin x}{x}$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

- (d) 記号として、 $f(x) = \sqrt{2+2x}$  とおき、 $f^{\circ 0}(x) = x$ 、 $f^{\circ 1}(x) = f(x)$ 、 $f(f(x)) = f^{\circ 2}(x)$ 、 $f(f^{\circ n}(x)) = f^{\circ(n+1)}(x)$  と書く事にする。半角の公式により、

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

したがって

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{1}{2} f(\cos \frac{\pi}{2^n})$$

もう一度同じ事をやると、

$$f\left(\cos \frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2 + f\left(\cos \frac{\pi}{2^{n-1}}\right)} = f^{\circ 2}\left(\cos \frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$$

これを繰り返す事で  $n \geq 1$  について

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = f^{\circ n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

を得る。(c) の式に  $x = \frac{\pi}{2}$  を代入して上の式を使うと求める式が得られている。

5. (a)  $\alpha > -1$  のとき、 $x^\alpha e^{-x}$  は  $(0, \infty)$  で広義積分可能で、

$$L(x^\alpha) = \int_0^\infty e^{-sx} x^\alpha dx$$

$s > 0$  なので、 $v = sx$  と変換すると  $dv = s dx$  で、積分範囲は変化しないので、

$$\begin{aligned} L(x^\alpha) &= \int_0^\infty \frac{v^\alpha}{s^\alpha} e^{-v} s^{-1} dv \\ &= \Gamma^{\alpha+1} s^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

- (b)

$$L(e^{\alpha x}) = \int_0^\infty e^{-sx+\alpha x} dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} dx$$

$s > \alpha$  ならばこの積分は収束するので、

$$\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} dx = \frac{1}{s-\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-(s-\alpha)x}]_0^N = \frac{1}{s-\alpha}$$

がわかる。

- (c)  $s > 0$  のとき部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-sx} \sin \alpha x dx &= \left[ \frac{-1}{s} e^{-sx} \sin \alpha x \right]_0^N + \frac{\alpha}{s} \int_0^N e^{-sx} \cos \alpha x dx \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sN} \sin \alpha N - \frac{\alpha}{s^2} [e^{-sx} \cos \alpha x]_0^N - \frac{\alpha^2}{s^2} \int_0^N e^{-sx} \sin \alpha x dx \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{s^2}} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sN} \sin \alpha N \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^2} e^{-sN} \cos \alpha N \right] \end{aligned}$$

したがって  $N \rightarrow \infty$  とすると、

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \sin \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

(d)

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-sx} \cos \alpha x \, dx &= \left[ \frac{-1}{s} e^{-sx} \cos \alpha x \right]_0^N - \frac{\alpha}{s} \int_0^N e^{-sx} \sin \alpha x \, dx \\ &= \frac{1}{s} (1 - e^{-sN} \cos \alpha N) + \frac{\alpha}{s^2} [e^{-sx} \sin \alpha x]_0^N - \frac{\alpha^2}{s^2} \int_0^N e^{-sx} \cos \alpha x \, dx \\ &= \frac{s}{s^2 + \alpha^2} (1 - e^{-sN} \cos \alpha N - \frac{\alpha}{s} e^{-sN} \sin \alpha N) \end{aligned}$$

右辺は  $s > 0$  のとき  $\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$  に収束するが、 $s \leq 0$  のときは振動する。 $(N = 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \rightarrow \infty$  のときを考えるとよい。)

6. できるだけ簡単に判定する事を考える。

(1)  $n \geq 1$  のとき  $n^2 + 2n + 3 \leq 6n^2$  だから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} \geq \int_2^{\infty} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \infty \end{aligned}$$

(2) 分母の次数が分子の次数より 2 大きいので、これは  $\frac{1}{n^2}$  の和と比較したい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4} = -\frac{4}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$$

後ろの級数は正項級数なので、この収束・発散を考えれば良い。 $n \geq 2$  のとき  $n^3 \geq 8$  だから  $\frac{n^3}{2} \geq 4$  で、

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4} &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6n+2}{n^3} \\ &\leq \int_1^{\infty} \left( \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \, dx \\ &\leq [-6x^{-1} - x^{-2}]_1^{\infty} = 7 < \infty \end{aligned}$$

したがってこの級数は収束する。

- (3) これも分母の  $n$  の指数は  $3/2$  だから、収束するはず。正項級数なので、上からの評価を考える。 $n \geq 1$  のとき、 $n+1 \geq n$  なので、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \\ &\leq 1 + \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = 1 + [-2x^{-1/2}]_1^{\infty} \\ &= 3 < \infty\end{aligned}$$

- (4) これも  $n \geq 1$  のとき  $2n+1 \leq 4n$  だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} \\ &\leq 2 + 2 \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = 6 < \infty\end{aligned}$$

したがって、この級数も収束。